Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

08.01.2020

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|a_{ij}| < \varepsilon$ für $1 \le i, j \le n$. Zeigen Sie $\|A\|_2 \le n\varepsilon$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Schur-Zerlegung von A ist gegeben durch $A = QUQ^H$, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist und $Q^H := \overline{Q}^\top$.

(i) Zeigen Sie $\|A\|_2 = \|U\|_2$.
(ii) Zeigen Sie, dass U und A dieselben Eigenwerte besitzen.
(iii) Sei $X = \operatorname{diag}(1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1})$. Zeigen Sie $\|A\|_2 = \|X^{-1}UX\|_2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\rho(A) = 0$. Zeigen Sie, dass gilt $A^m = 0$ für m hinreichend groß.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie $\|A\|_2$ und $\|A\|_\infty$.
(ii) Konvergiert die Folge

$$x^{n+1} = Ax^n - b$$

für beliebige $x^0, b \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$?
Hinweis: Banach'scher Fixpunktsatz

Abgabe: Freitag, den 17.01.2020, bis 14:00 in die Briefkästen vor dem CIP-Pool (SR 201, HH10).