Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. D. Kröner
M.Sc. J. Gerstenberger

22.01.2020

Übung zur Vorlesung

Numerik

WS 2019/20 — Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Überprüfen Sie für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

das Gauss-Seidel- und das Jacobi-Verfahren auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $b \in \mathbb{R}^2$. Das Gleichungssystem $Tx = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

soll für ein geeigntes $\alpha \in \mathbb{R}$ mit dem Richardson-Verfahren,

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \left(Ax^k - b \right) \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

mit Startwert $x^0 = 0$ gelöst werden. Bestimmen Sie α, so dass das Verfahren optimal konvergiert, d.h. der Spektralradius von $I - \alpha T$ minimal ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $a_{i,i+1} \neq 0$, $a_{i+1,i} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Zeigen Sie, dass A irreduzibel ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Iterationsverfahren definiert durch

$$(D - U)x^{k+1} = Lx^k - b \qquad (k \in \mathbb{N})$$

für eine irreduzible und diagonaldominante Matrix $A = D - U - L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für jeden Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, wobei D eine Diagonalmatrix, U eine strikt obere und L eine strikt untere Dreiecksmatrix ist.

Abgabe: Freitag, den 31.01.2020, bis 14:00 in die Briefkästen vor dem CIP-Pool (SR 201, HH10).