Abteilung für Angewandte Mathematik 21.4.2010
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 1

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 26. April, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **4 Punkte**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für jedes $z \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} d(\cdot, z) \ : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, z) \end{aligned}$$

stetig ist. Zeigen Sie, dass $d(\cdot, z)$ sogar Lipschitz stetig mit Konstante 1 ist, d.h für alle $x, y \in X$ gilt

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

Aufgabe 2 **6 Punkte**

Für $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ definieren wir

$$d(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum ist.