Abteilung für Angewandte Mathematik 28.6.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 10

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 5. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 33 **5 Punkte**

Sei $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ mit $p, q \in [1, \infty]$. Sei r zwischen p und q, dann gilt $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ für ein $\theta \in [0, 1]$. (Hierbei gilt die Konvention $1/\infty = 0$.) Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ und

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}.$$

Dies ist die *verallgemeinerte Hölder'sche Ungleichung*. Tipp: Nutzen Sie die klassiche Hölder'sche Ungleichung und $|f| = |f|^{\theta} |f|^{1-\theta}$.

Aufgabe 34 **6 Punkte**

Sei $1 \leq p < q < \infty$.

(a) Zeigen Sie, das $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \,:\, \|f\|_q \leq 1\}$ abgeschlossen in $L^p(\Omega)$ ist.

(c) Sei $f_n \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ und sei $f \in L^p(\Omega)$. Weiterhin gelte $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ mit $\sup_n \|f_n\|_q \leq C$. Sei r zwischen p und q mit $r \neq q$. Zeigen Sie, dass $f \in L^r(\Omega)$ und $f_n \to f$ in $L^r(\Omega)$. Tipp: Aufgabe 33.

Aufgabe 35 **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt.

(a) Sei $f \in L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
Tipp für „$\leq$": Aufgabe 33.

(b) Sei $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$. Weiterhin sei $\sup_{1 \leq p < \infty} \|f\|_p < \infty$. Zeigen Sie, dass $f \in L^\infty(\Omega)$ ist. Tipp: Betrachten Sie zunächst $f_N := f\chi_{\{|f| \leq N\}}$.

(c) Konstruieren Sie eine Funktion $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(0, 1)$ derart, dass $f \notin L^\infty(0, 1)$.

Aufgabe 36 **4 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$ und $u_n, u \in L^p(\Omega)$ mit $u_n \rightharpoonup u$ schwach in $L^p(\Omega)$. Weiterhin gelte $u_n \to v$ fast überall. Zeigen Sie, dass $u = v$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Lemmas von Fatou, dass $v \in L^p(\Omega)$ gilt und v fast überall endlich ist. Sei nun $E_k := \{x \in \Omega \,:\, \sup_{n \geq k} |u_n(x)| \geq k\}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $|\cap_k E_k| = 0$ und $\lim_{k \to \infty} |E_k| = 0$. Benutzen Sie dominierte Konvergenz auf die Funktion $u_n w \chi_{\Omega \setminus E_k}$ für ein beliebiges $w \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Folgern Sie, $u = v$ fast überall auf $\Omega \setminus E_k$.