Abteilung für Angewandte Mathematik 5.7.2010

Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 11

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 12. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 37 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$e_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi,\pi))$ bilden, wobei wir das Skalarprodukt $\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ benutzen.

Damit laufen die Indizes (im Gegensatz zur Vorlesung) zur einfacheren Darstellung in $\mathbb{Z}$ statt in $\mathbb{N}$. Die endlichen Summen sind also $\sum_{n=-k}^{k}$ statt $\sum_{n=1}^{k}$.

Aufgabe 38 **4 Punkte**

Sei $f \in C^1([-\pi,\pi])$ und $x_0 \in [-\pi,\pi]$. Sei $P_k f := \sum_{n=-k}^{k} \langle f, e_k\rangle e_k$. Zeigen Sie, dass $P_k f(x_0) \to f(x_0)$ für $k \to \infty$, d.h. die Fourierreihe konvergiert punktweise.

Tipp: Sei ξ die konstante Funktion mit Wert $f(x_0)$, dann ist $P_k\xi = \xi$. Betrachten Sie $P_n f(x_0) - f(x_0) = (P_n f - P_n \xi)(x_0)$. Formen Sie diesen Ausdruck mittels Translation und Symmetrie so um, dass im Integranden der Term $f(x_0+2z) + f(x_0-2z) - 2\xi$ auftaucht. Nun kann der gesamte Ausdruck als die Differenz zweier Fourierkoeffizienten einer neuen Funktion g aufgefasst werden. Wieso konvergiert dieser Ausdruck gegen Null?

Aufgabe 39 **4 Punkte**

Zeigen Sie mit Aufgabe 38, dass die e_k ein **vollständiges** Orthonormalsystem sind. Tipp: Nutzen Sie die Dichtheit glatter Funktionen.

Aufgabe 40 **4 Punkte**

Sei $v \in L^2((-\pi,\pi))$ eine 2π-periodische Funktion. Definiere $v_n(x) := v(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $v_n \rightharpoonup \alpha$ in $L^2((-\pi,\pi))$, wobei $\alpha := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\,dx$ der Mittelwert von v ist.

Tipp: Fourierreihe. Zeigen Sie zunächst $\lim_{n\to\infty} \langle v_n - \alpha, e_k\rangle = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 41 **4 Punkte**

Sei $u_n(x) := \sin(nx)$ für $x \in (-\pi,\pi)$. Zeigen Sie mit Aufgabe 40, dass $u_n \rightharpoonup 0$ und $(u_n)^2 \rightharpoonup \frac{1}{2}$.

Hieraus folgt, dass im Allgemeinen schwach$-\lim(u_n^2) \neq (\text{schwach}-\lim u_n)^2$.