Abteilung für Angewandte Mathematik 12.7.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 12

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 19. Juli, vor der Vorlesung

Definition: Seien X, Y Banachräume und sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator. T heißt *kompakt*, wenn T stetig ist und beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet. T heißt *vollstetig*, wenn T stetig ist und schwach konvergente Folgen auf stark konvergente Folgen abbildet.

Aufgabe 42 **5 Punkte**

Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $T : H_1 \to H_2$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, das T genau dann kompakt ist, wenn T vollstetig ist.
Tipp „$\Rightarrow$“: Lineare, stetige Operatoren bilden schwach konvergente Folgen auf schwach konvergente Folgen ab.

Aufgabe 43 **3+3 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ definieren wir

$$(Kf)(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ für $K \in C(\overline{\Omega \times \Omega})$ kompakt ist.
Tipp: Zeigen mit Hilfe von Arzela-Ascoli, dass $K : L^2(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ kompakt ist

(b) Zeigen Sie, dass $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ für $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ kompakt ist.
Tipp: Approximation.

Aufgabe 44 **5 Punkte**

Seien X_1, X_2, X_3 Banachräume, $K \in K(X_1, X_2)$ und $T \in L(X_2, X_3)$. Ferner sei T injektiv. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ gibt so, dass

$$\|Kx\|_{X_2} \le \varepsilon \|x\|_{X_1} + C_\varepsilon \|TKx\|_{X_3}$$

für alle $x \in X_1$. Tipp: Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 45 **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass jeder unendlichdimensionale, separable Hilbertraum H isometrisch isomorph zu l^2 ist.