Abteilung für Angewandte Mathematik 26.4.2010
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 2

`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/`

Abgabe: Montag, den 3. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 3 **8 Punkte**

Seien $X = (X, \tau)$ und $Y = (Y, \sigma)$ topologische Räume und $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig. (Definition mittels Umgebungen)

(b) Urbilder offener Mengen sind offen.

(c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Sind X und Y zudem metrische Räume, so sind (a), (b) und (c) äquivalent zu

(d) f ist folgenstetig.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Sei $X = (X, \tau)$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ sei $V(x)$ das System der durch τ erzeugten Umgebungen. Sei nun

$$\mathcal{O} := \{U \subset X \,:\, \text{für alle } x \in U \text{ gilt } U \in V(x)\},$$

d.h. $\mathcal{O}$ besteht aus all den Mengen, die Umgebung aller ihrer Punkte sind. Zeigen Sie $\mathcal{O} = \tau$.

Aufgabe 5 **4 Punkte**

Seien X und Y Banachräume und sei X_0 ein dichter Untervektorraum von X. Dann ist X_0 versehen mit der Norm von X ein normierter Raum. Zeigen Sie: Jedes $A \in L(X_0, Y)$ lässt sich eindeutig zu einem $A \in L(X, Y)$ fortsetzen. Die Fortsetzung erfüllt $\|A\|_{L(X,Y)} = \|A\|_{L(X_0,Y)}$.

Aufgabe 6 **4 Punkte**

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein Untervektorraum mit $\dim E < \infty$. Zeigen Sie, dass E abgeschlossen ist.