Abteilung für Angewandte Mathematik 3.5.2010
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 3

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 10. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 7 **6 Punkte**

Sei X ein Banachraum und sei $E \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist X/E ein Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $\|\hat{x}\|_{X/E} := \inf_{y \in E} \|x - y\|_X$ eine Norm auf X/E definiert. Dies ist die *Quotientennorm*.

(b) Zeigen Sie, dass X/E (versehen mit der Quotientennorm) ein Banachraum ist.

Aufgabe 8 **6 Punkte**

Sei V ein normierter Vektorraum und $g : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie:

(a) g ist unterhalbstetig genau dann, wenn $\operatorname{epi}(g)$ abgeschlossen ist.

(b) g ist unterhalbstetig genau dann, wenn $\{x \in V : g(x) > \lambda\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ offen ist.

(c) g ist konvex genau dann, wenn $\operatorname{epi}(g)$ konvex ist.

(d) Sei $g_j : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $j \in J$, eine Familie unterhalbstetiger Funktionen. Dann ist $g := \sup_{j \in J} g_j$ (punktweise definiert) unterhalbstetig.

Aufgabe 9 **5 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Ferner sei A ein linearer Teilraum und $L : A \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit

$$L(x) \le \varphi(x) \qquad \text{für alle } x \in A.$$

Zeigen Sie, dass es eine Fortsetzung $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ von L gibt mit

$$\widetilde{L}(x) \le \varphi(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Tipp: Benutzen Sie für die Elementarfortsetzung

$$\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda(a + \frac{1}{\lambda}x) + \mu(b - \frac{1}{\mu}x)}{\lambda + \mu}$$

mit $a, b \in A$, $x \in X$ und $\lambda, \mu > 0$ und die Konvexität von φ.

Aufgabe 10 **3 Punkte**

Sei V ein normierter Vektorraum und $u \in V$ mit $u \neq 0$. Dann existiert ein $f \in V^*$ mit $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ und $\langle f, u \rangle = \|u\|_V^2$. Sei zusätzlich $\|\cdot\|_{V^*}$ strikt konvex, d.h. aus $\|f_0\|_{V^*} = \|f_1\|_{V^*} = 1$, $f_0 \neq f_1$ folgt $\|(1-t)f_0 + tf_1\|_{V^*} < 1$ für alle $t \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass f eindeutig bestimmt ist.