Abteilung für Angewandte Mathematik 10.5.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 4

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 17. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 11 — 6 Punkte

Zeigen Sie, dass es eine Funktion $g \in C([0,1])$ gibt, welche in keinem Punkt des Intervalls $[0,1/2]$ differenzierbar ist. Betrachten Sie dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$M_n := \Big\{ f \in C([0,1]) \,:\, \text{es gibt ein } x_0 = x_0(f) \in [0,1/2] \text{ mit } \sup_{0<h<1/2} h^{-1}|f(x_0+h) - f(x_0)| \le n \Big\}$$

und beweisen Sie, dass M_n in $C([0,1])$ abgeschlossen ist, aber keine inneren Punkte besitzt.

Aufgabe 12 — 6 Punkte

Sei $|||\cdot|||$ eine Norm auf $C([0,1])$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $(C([0,1]), |||\cdot|||)$ ist vollständig.

(b) Aus $\lim_{n\to\infty} |||f_n||| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ äquivalent zur der Standardnorm $\|\cdot\|_\infty$ von $C([0,1])$ ist.

Tipp: Wenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Abbildung $f \mapsto f$, $(C([0,1]), |||\cdot|||) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ an.

Aufgabe 13 — 5 Punkte

Seien E und F Banachräume und $A \in L(E,F)$. Zeigen Sie, dass $R(A)$ in F abgeschlossen ist genau dann, wenn ein $C > 0$ existiert derart, dass zu jedem $x \in E$ ein $\xi \in E$ existiert mit $A\xi = Ax$ und $\|\xi\| \le C\,\|A\xi\|$.

Aufgabe 14 — 3 Punkte

Sei E ein unendlich dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie mit dem Satz von Baire, dass E keine abzählbare Vektorraumbasis besitzt. Folgern Sie, dass es keine Norm auf dem Raum der Polynome $\mathbb{R}[X]$ gibt, bzgl. der $\mathbb{R}[X]$ vollständig ist.