Abteilung für Angewandte Mathematik 17.5.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 5

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 31. Mai, vor der Vorlesung

Definition: Sei ℓ^∞ der Raum der Folgen versehen mit der Supremumsnorm. Weiterhin sei ℓ^1 der Raum der summierbaren Folgen versehen mit der Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} := \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Außerdem sei c_0 der Raum der Nullfolgen.

Bemerkung: Sowohl ℓ^∞ als auch ℓ^1 sind Banachräume. Es gilt $\ell^1 \subset c_0 \subset \ell^\infty$ und $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ (Isometrie).

Aufgabe 15 **5 Punkte**

Sei c_{00} die Menge der Folgen, die nur endliche viele von Null verschieden Elemente haben, d.h. $c_{00} := \{(x_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_j \neq 0 \text{ für nur endlich viele } j \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Abschluss der Menge c_{00} in ℓ^∞ gleich c_0 ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Abschluss der Menge c_{00} in ℓ^1 gleich ℓ^1 ist.

(c) Zeigen Sie, dass c_0 separabel ist und ℓ^∞ nicht separabel ist.

Aufgabe 16 **5 Punkte**

Definiere den Operator $T : \ell^1 \to \ell^1$ durch $T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (\frac{1}{n}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie $N(T)$, $N(T)^\perp$, T^*, $R(T^*)$ und $\overline{R(T^*)}$. Folgern Sie $\overline{R(T^*)} \subsetneqq N(T)^\perp$.

Aufgabe 17 **5 Punkte**

Wegen $c_0 \subset \ell^\infty$ und $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ gilt $c_0 \subset (\ell^1)^*$. Bestimmen Sie

$$\begin{aligned} {c_0}^\perp &= \{x \in \ell^1 : \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } f \in c_0\}, \\ {c_0}^{\perp\perp} &= \{f \in (\ell^1)^* = l^\infty : \langle f, x\rangle = 0 \text{ für alle } x \in {c_0}^\perp\}. \end{aligned}$$

Verifizieren Sie ${c_0}^{\perp\perp} \neq c_0$.

Aufgabe 18 **5 Punkte**

Sei $E := C([0,1])$ mit der üblichen Norm. Wir betrachten den Operator $A : D(A) \to E$ mit $D(A) := C^1([0,1]) \subset E$ und $Au := u'$.

(a) Zeigen Sie $\overline{D(A)} = E$.

(b) Ist A beschränkt?

(c) Ist A abgeschlossen?

(d) Sei $B : D(B) \to E$ mit $D(B) := C^2([0,1]) \subset E$ und $Bu := u'$. Ist B abgeschlossen?