Abteilung für Angewandte Mathematik 7.6.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 7

`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/`

Abgabe: Montag, den 14. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 23 **5 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass $(X, \tau(X, X^*))$ folgenvollständig ist, d.h. jede $\tau(X, X^*)$-Cauchyfolge aus X hat einen schwachen Grenzwert in X. Eine Folge $x_n \in X$ heißt $\tau(X, X^*)$-*Cauchyfolge*, falls es für jede $\tau(X, X^*)$-Nullumgebung U einen Index $N_U \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n - x_m \in U$ für alle $n, m \geq N_U$.

Aufgabe 24 **5 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum mit $\dim X = \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass jede offene Menge aus $(X, \tau(X, X^*))$ unbeschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(X, \tau(X, X^*))$ nicht metrisierbar ist.
Tipp: Satz von Baire und Aufgabe 23.

Aufgabe 25 **5 Punkte**

Sei X ein Banachraum, $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ linear, $\varphi \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass die Hyperebene $H := \{f \in X^* \,|\, \varphi(f) = \alpha\}$ $\tau(X^*, X)$-abgeschlossen ist.

(a) Zeigen Sie, dass φ $\tau(X^*, X)$-stetig ist.

Bemerkung: Dies ist eine Verallgemeinerung von Lemma 2.2 aus der Vorlesung, welches besagt, dass H genau dann abgeschlossen ist, wenn φ stetig ist.

(b) Folgern Sie, dass es ein $x \in X$ gibt mit $H = \{f \in X^* \,|\, \langle f, x\rangle = \alpha\}$.

Aufgabe 26 **5 Punkte**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass konvexe, schwach abgeschlossene Mengen schon stark abgeschlossen sind. Die Verschärfung, dass konvexe, $*$-schwach abgeschlossene Mengen ebenfalls stark abgeschlossen sind, ist im allgemeinen falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

(a) Sei X eine Banachraum. Zeigen Sie, dass für jedes $\xi \in X^{**}$ die Hyperebene $\ker \xi := \{f \in X^* \,|\, \langle \xi, f\rangle = 0\}$ $\tau(X^*, X^{**})$-abgeschlossen ist.

(b) Sei nun X zusätzlich nicht-reflexiv. Zeigen Sie, dass es ein $\xi_0 \in X^{**}$ gibt, so dass $\ker \xi_0$ nicht $\tau(X^*, X)$ abgeschlossen ist. Tipp: Aufgab 25.