Abteilung für Angewandte Mathematik 14.6.2010

Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 8

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 21. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 27 **5 Punkte**

Sei X ein separabler Banachraum, $M \subset X$ ein Untervektorraum und $f_0 \in X^*$. Zeigen Sie, dass es ein $g_0 \in M^\perp$ gibt mit

$$\inf_{g \in M^\perp} \|f_0 - g\|_{X^*} = \|f_0 - g_0\|_{X^*}.$$

Es gibt **4 Sonderpunkte**, wenn man auf die Voraussetzung „separabel" verzichtet. Tipp: Beweisen und benutzen Sie, dass der absteigende Schnitt nicht-leerer kompakter Mengen nicht-leer ist.

Aufgabe 28 **5 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $|\cdot|$ eine gleichmäßig konvexe Norm auf X.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass aus $|x|, |y| \leq 1$ und $|\frac{x-y}{2}| \geq \varepsilon$ folgt, dass $|\frac{x+y}{2}|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 - \delta$.

(b) Seien nun $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ zusätlich äquivalent. Zeigen Sie, dass es für jedes $k > 1$ eine gleichmäßig konvexe Norm $|||\cdot|||$ gibt, die äquivalent zu $\|\cdot\|$ ist und $\|x\| \leq |||x||| \leq k\,\|x\|$ für alle $x \in X$ erfüllt.
Tipp: $|||x|||^2 = \|x\|^2 + \alpha|x|^2$.

Aufgabe 29 **5 Punkte**

Sei X ein Banachraum.

(a) Sei $f_n \in X^*$ derart, dass $\langle f_n, x\rangle$ für jedes $x \in X$ konvergiert. Zeigen Sie, dass es ein $f \in X^*$ gibt so, dass $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

(b) Sei X zusätzlich reflexiv. Sei $x_n \in X$ derart, dass $\langle f, x_n\rangle$ für jedes $f \in X^*$ konvergiert. Zeigen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt so, dass $x_n \rightharpoonup x$.

(c) Auf die Voraussetzung „reflexiv" in (b) kann man nicht verzichten kann: Sei hierzu $X := c_0$. Dann gilt (ohne Beweis) $X^* = (c_0)^* = \ell^1$ und $X^{**} = (\ell^1)^* = \ell^\infty$. Betrachten Sie nun $x_n := (\underbrace{1, \dots, 1}_{\text{n mal}}, 0, 0, \dots)$ und zeigen Sie, dass (b) für dieses X und x_n nicht gelten kann.

Aufgabe 30 **5 Punkte**

Sei X ein separabler Banachraum und sei $f_n \in X^*$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie auf direktem Wege (d.h. ohne Satz 4.12 über die Metrisierbarkeit von B_{X^*} bzgl. der Schwach-$*$-Topologie $\tau(X^*, X)$ zu benutzen), dass es eine Teilfolge von f_n gibt, welche schwach-$*$-konvergiert.
Tipp: Diagonalfolgenargument und Aufgabe 29 (a).