Abteilung für Angewandte Mathematik 21.6.2010
Prof. Dr. M. Růžička, Prof. Dr. L. Diening

Funktionalanalysis I

SS 2010 — Woche 9

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/FA1-SS10/

Abgabe: Montag, den 28. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 31 **10 Punkte**

Ziel dieser Aufgabe ist es die Umkehrung von Satz 4.13 aus der Vorlesung zu beweisen: Sei X ein Banachraum und sei B_X metrisierbar in der schwachen Topologie $\tau(X, X^*)$. Dann ist X^* separabel. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Sei $U_n := \{x \in B_X : d(x, 0) < \frac{1}{n}\}$. Sei $\tilde{\tau} := \tau(X, X^*)|_{B_X}$, d.h. $\tilde{\tau} = \{U \cap B \,|\, U \in \tau(X, X^*)\}$. Zeigen Sie, dass U_n eine $\tilde{\tau}$-Nullumgebung ist. Folgern Sie, dass es eine endliche Menge $\Phi_n \subset X^*$ und $\varepsilon_n > 0$ gibt so, dass $V_n \subset U_n$, wobei $V_n := \{x \in B_X : |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n$ für alle $f \in \Phi_n\}$. Sei $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ und sei E der von D aufgespannte lineare Teilraum von X^*. Mit Hilfe eines Widerspruchsarguments soll in den nachfolgenden Schritten nun gezeigt werden, dass E dicht in X^* bzgl. der starken Topologie von X^* ist. Sei also im Folgenden $\overline{E} \neq X^*$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in X^{**}$ mit $\|\xi\|_{X^{**}} = 1$ und ein $f_0 \in X^*$ gibt so, dass $\langle \xi, f_0\rangle > 1$ und $\langle \xi, f\rangle = 0$ für alle $f \in E$.

(c) Sei $W := \{x \in B_X : |\langle f_0, x\rangle| < 1/2\}$. Zeigen Sie $V_{n_0} \subset U_{n_0} \subset W$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass es ein $x_1 \in B_X$ gibt mit $\big|\langle f_0, x_1\rangle - \langle \xi, f_0\rangle\big| < 1/2$ und $\big|\langle f, x_1\rangle - \langle \xi, f\rangle\big| < \varepsilon_{n_0}$ für alle $f \in \Phi_{n_0}$.

(e) Folgern Sie, dass $x_1 \in V_{n_0}$ und $\langle f_0, x_1\rangle > 1/2$.

(f) Schließen Sie hieraus den gewünschten Widerspruch.

(g) Begründen Sie, wieso hieraus folgt, dass X^* separabel ist.

Aufgabe 32 **10 Punkte**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei $C \subset X$ konvex, nicht leer und abgeschlossen.

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in X$ genau ein Element aus C gibt, welches $\inf_{y\in C} \|y - x\|_X$ annimmt. Dieses Element bezeichnen wir mit $P_C x$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Minimalfolge $y_n \in C$, d.h. jede Folge mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = \inf_{y\in C} \|y - x\|$, stark gegen $P_C x$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $P_C : X \to X$ stetig ist.