Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening 20.12.2004

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 10

Abgabe: Montag, den 10. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Formulieren und beweisen Sie die *Regel von de l'Hospital* für den Fall $x \to \infty$.

Tipp: Benutzen Sie die Substitution $y := \frac{1}{x}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $\arcsin x$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$. Berechnen Sie die Ableitung von f und geben Sie den Definitionsbereich von f' an.

Aufgabe 3: **12 Punkte**

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a+x^2)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{cx}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - \cos x}{x \ln x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}.$$

Aufgabe 4: **6 Sonderpunkte !!!**

Zeigen Sie: Ist das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^\infty c_n$ zweier konvergenter Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$, $\sum_{n=0}^\infty b_n$ konvergent ($a_n, b_n \in \mathbb{C}$), so gilt

$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big). \tag{1}$$

Gehen Sie hierbei folgendermaßen vor:

(a) Seien A_m, B_m, C_m die Partialsummen der drei Reihen. Zeigen Sie, wie in Aufgabe 2 Blatt 9, dass aus $A_m \to A$ und $B_m \to B$ für $m \to \infty$ schon $\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^n A_m B_{n-m} \to A\,B$ für $n \to \infty$ folgt.

Tipp: $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^n A_m B_{n-m}\right) - A\,B = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^n (A_m B_{n-m} - A\,B)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{m=0}^n A_m B_{n-m} = \sum\limits_{l=0}^n C_l$.

(c) Folgern Sie (1) aus (a), (b) und Aufgabe 2 Blatt 9 (für die Folge $C_n - C$).

FROHE WEIHNACHTEN!