Mit anderen Worten, es ist

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f|(-\infty, a)(x) = b,$$

wobei $f|(-\infty, a)$ die Einschränkung von f auf $(-\infty, a)$ ist. Entsprechendes gilt für $\lim_{x \searrow a}$. Jetzt ist auch klar, daß sich die Sätze (11.1) und (11.2) sinngemäß auf diese „linksseitigen“ und „rechtsseitigen“ Grenzwerte übertragen lassen.

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von D. Man schreibt

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to a} f(x) = \infty \\ &\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D \setminus \{a\} : (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > c). \end{aligned}$$

Analog definiert man $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \infty$, u.s.w.

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und D nicht nach oben beschränkt. Man schreibt

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \infty} f(x) = b \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists c \in \mathbb{R} \ \forall x \in D : (x > c \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon). \end{aligned}$$

Analog definiert man $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, u.s.w.

Beispiele. Sei $D := R \setminus \{0\}$, $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty.$$

Mit demselben D sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Dann ist

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty.$$

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Polynomfunktion*, das heißt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

mit gegebenen Zahlen $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei etwa $a_n > 0$. Dann gilt (für $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} p(x) &= \infty, \\ \lim_{x \to -\infty} p(x) &= \begin{cases} \infty, \text{ wenn } n \text{ gerade ist,} \\ -\infty, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dies liest man sofort an der für $x \neq 0$ gültigen Darstellung

$$p(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

ab.

Stetigkeit

Die am Anfang dieses Paragraphen intuitiv erläuterte Stetigkeit einer Funktion läßt sich nun bequem mit Hilfe des Grenzwertbegriffes formulieren. Wir ziehen aber zunächst eine äquivalente Definition vor.

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$. Die Funktion f heißt *stetig in* a, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{mit } |x - a| < \delta.$$

Also kurz: f ist stetig in $a \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

In gleichwertiger Weise können wir die Stetigkeit nun mit Verwendung des Grenzwertbegriffs ausdrücken, wie sich unmittelbar aus den Definitionen ergibt.

(11.3) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D. Dann gilt*

$$f \text{ stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Bemerkung. Der Fall, daß $a \in D$, aber a nicht Häufungspunkt von D ist (a heißt dann *isolierter Punkt* von D), kann außer Betracht bleiben, da offenbar jede reelle Funktion in jedem isolierten Punkt ihres Definitionsbereiches stetig ist.

Unmittelbar aus (11.3) und (11.1) erhalten wir:

(11.4) **Satz.** *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $a \in D$ genau dann stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß Summen und Produkte von stetigen Funktionen stetig sind. Für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ sind $f + g$ und fg erklärt durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(fg)(x) := f(x)g(x)$ für alle $x \in D$.

(11.5) **Satz.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ stetig. Dann sind die Funktionen $f + g$ und fg in a stetig. Ist $f(a) \neq 0$, so existiert eine Umgebung U von a mit $f(x) \neq 0$ für $x \in U \cap D$, und $1/f|U \cap D$ ist stetig in a.*

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus (11.4) und den Rechenregeln für Grenzwerte in (7.3). Die Existenz von U folgt unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit. ■

Bei Stetigkeitsbeweisen kann man wahlweise diejenige der äquivalenten Formulierungen benutzen, die gerade am bequemsten ist.

Beispiele.

Zum Nachweis der Stetigkeit in a einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist, wenn wir unmittelbar die gewählte Definition verwenden wollen, zu zeigen, daß zu gegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$x \in D \wedge |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Wir geben im folgenden, soweit möglich, zu vorgegebenem ϵ ein solches δ explizit an.

1) Konstante Funktionen: δ beliebig.

2) $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$, z.B. $\delta = \epsilon$.

3) Hieraus und aus (11.5) folgt, daß jede *rationale Funktion* stetig ist. Hierunter versteht man eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für $x \in D$, wobei p, q Polynomfunktionen sind und $D := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ ist.

4) $\sqrt{} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$,

1. Fall: $a = 0$. Wähle z.B. $\delta = \epsilon^2$.

2. Fall: $a > 0$. Wähle z.B. $\delta = \epsilon\sqrt{a}$, denn es ist

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

5) $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

$\delta = \epsilon$ leistet das Gewünschte wegen $\Big||x| - |a|\Big| \leq |x - a|$

6) Die Exponentialfunktion: Nach (9.2) gilt

$$|e^x - 1| \leq 2|x| \quad \text{für } |x| \leq 1, \text{ also}$$

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1| \leq e^a \cdot 2|x - a|.$$

Daher leistet $\delta := \min\{1, \frac{\epsilon}{2e^a}\}$ das Gewünschte.

Nun zwei unstetige (d.h. in mindestens einem Punkt nicht stetige) Funktionen:

7) Definiere

$$f(x) := \begin{cases} 0, \text{ wenn } x < 0 \\ 1, \text{ wenn } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist offenbar genau in 0 unstetig.

8) Die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte sog. *Dirichlet-Funktion* ist offenbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ unstetig. Denn in jeder Umgebung einer reellen Zahl liegen rationale und irrationale Zahlen.

Verschiedene äquivalente Formulierungen der Stetigkeit sind für die Anwendungen zweckmäßig. Zunächst eine besonders einprägsame unter Verwendung des Umgebungsbegriffes:

(11.6) **Satz.** *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $a \in D$ genau dann stetig, wenn zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a existiert mit $f(U \cap D) \subset V$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig in a. Sei V eine Umgebung von $f(a)$. Dann existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $U_\epsilon(f(a)) \subset V$. Zu diesem ϵ gibt es nach Voraussetzung ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Setze $U := U_\delta(a)$. Dann gilt $f(U \cap D) \subset V$. In der Tat, sei $y \in f(U \cap D)$, also $y = f(x)$ mit $x \in U \cap D$. Wegen $x \in U_\delta(a)$ gilt $|x - a| < \delta$, also $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, d.h. $y = f(x) \in U_\epsilon(f(a)) \subset V$.

„$\Leftarrow$“: Zu jeder Umgebung V von $f(a)$ gebe es eine Umgebung U von a mit $f(U \cap D) \subset V$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Zu $V := U_\epsilon(f(a))$ existiert nach Voraussetzung eine Umgebung U von a mit $f(U \cap D) \subset V$. Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $U_\delta(a) \subset U$. Sei jetzt $x \in D$ und $|x - a| < \delta$. Dann ist $x \in U_\delta(a) \subset U$, also $f(x) \in f(U \cap D) \subset V = U_\epsilon(f(a))$, d.h. $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. ■

Mit dieser Formulierung der Stetigkeit ist bequem zu arbeiten. Hierfür ein Beispiel.

(11.7) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in einem $a \in D$, sei $g : D' \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D'$ stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis. Wir benutzen (11.6). Sei W eine Umgebung von $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Da g stetig in $f(a)$ ist, existiert eine Umgebung V von $f(a)$ mit $g(V \cap D') \subset W$. Da f stetig in a ist, existiert eine Umgebung U von a mit $f(U \cap D) \subset V$. Also gilt $(g \circ f)(U \cap D) = g(f(U \cap D)) \subset g(V \cap D') \subset W$. ■

Schließlich wird noch naheliegenderweise definiert:

Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig*, wenn f stetig ist in a für alle $a \in D$.

Die Funktion im siebten der obigen Beispiele hat eine Unstetigkeit von besonders einfacher Art:

Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $a \in D$ eine *Sprungstelle*, wenn die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \searrow a} f(x)$$

existieren und verschieden sind.

Ist f eine monotone Funktion, so ist leicht zu sehen, daß in jedem Punkt a des Definitionsbereiches die einseitigen Grenzwerte von $f(x)$ für $x \nearrow a$ und $x \searrow a$ existieren. Bei einer monotonen Funktion sind die Unstetigkeitsstellen also sämtlich Sprungstellen. Hieraus kann man folgern, daß bei einer monotonen Funktion höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen auftreten können.

Im übernächsten Paragraphen werden wir einige wichtige spezielle Funktionen als Umkehrfunktionen von gewissen streng monotonen Funktionen einführen. Nach Satz (5.1) ist eine streng monotone Funktion injektiv, und die daher existierende Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.

(11.8) **Satz.** *Sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend, und D enthalte mehr als einen Punkt. Seien $y \in f(D)$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Es gilt $y = f(x)$ für ein (eindeutig bestimmtes) $x \in D$.

1. Fall: x ist nicht Endpunkt des Intervalls D. Dann existiert ein $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$ mit $\epsilon' \leq \epsilon$ und $[x - \epsilon', x + \epsilon'] \subset D$. Setze

$$\delta := \min\{y - f(x - \epsilon'), f(x + \epsilon') - y\}.$$

Wegen der strengen Monotonie von f ist $\delta > 0$. Sei jetzt $y_1 \in f(D)$, $|y_1 - y| < \delta$. Dann ist

$$f(x - \epsilon') < y_1 < f(x + \epsilon')$$

und daher nach (5.1)

$$x - \epsilon' = f^{-1}(f(x - \epsilon')) < f^{-1}(y_1) < f^{-1}(f(x + \epsilon')) = x + \epsilon',$$

wegen $x = f^{-1}(y)$ also $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)| < \epsilon' \leq \epsilon$.

<u>2. Fall:</u> x ist Endpunkt, etwa Maximum, des Intervalls D.

Dann existiert ein $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$ mit $\epsilon' \leq \epsilon$ und $[x - \epsilon', x] \subset D$. Setze $\delta := y - f(x - \epsilon')$. Für $y_1 \in f(D)$ mit $|y_1 - y| < \delta$ gilt $f(x - \epsilon') < y_1 \leq y$, woraus wie oben $|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)| < \epsilon$ folgt. ■

Man beachte, daß in (11.8) nicht die Stetigkeit von f vorausgesetzt zu werden braucht. Andererseits läßt sich selbst bei stetigem f nicht auf die Stetigkeit von f^{-1} schließen, falls der Definitionsbereich von f kein Intervall ist. Dies läßt sich leicht durch Beispiele belegen.

12 Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir stellen in diesem Abschnitt einige wichtige Sätze zusammen, die sich auf reelle Funktionen beziehen, die in ihrem ganzen Definitionsbereich stetig sind. Diese Sätze haben mannigfache Anwendungen. Aus der Stetigkeit einer Funktion lassen sich besonders dann interessante Folgerungen ziehen, wenn der Definitionsbereich von spezieller Art ist. Zunächst betrachten wir kompakte Definitionsbereiche.

(12.1) **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(D)$ kompakt.*

Beweis. Wir benutzen die durch den Überdeckungssatz von Heine-Borel (10.8) und seine Umkehrung (10.9) gegebene Charakterisierung kompakter Mengen.

Sei $\mathcal{M}$ eine offene Überdeckung von $f(D)$. Sei $x \in D$. Es gibt eine Menge $M \in \mathcal{M}$ mit $f(x) \in M$. Da M Umgebung von $f(x)$ und f stetig ist, können wir nach Satz (11.6) eine offene Umgebung U von x wählen mit $f(U \cap D) \subset M$. Das System

$$\{U \mid U \subset \mathbb{R} \text{ offen}, \exists M \in \mathcal{M} : f(U \cap D) \subset M\}$$

ist also eine offene Überdeckung von D und enthält daher nach (10.8) eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $M_i \in \mathcal{M}$ mit $f(U_i \cap D) \subset M_i$. Es gilt $f(D) \subset \bigcup_{i=1}^n M_i$, also ist $\{M_1, \ldots, M_n\}$ eine endliche Überdeckung von $f(D)$. Aus (10.9) folgt die Kompaktheit von $f(D)$. ■

(12.2) **Satz.** *Jede auf einer (nichtleeren) kompakten Menge stetige reelle Funktion nimmt dort ein Maximum (und analog ein Minimum) an.*

Genauer: Ist $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren $a, b \in D$ mit $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in D$. Der Beweis ergibt sich sofort aus (12.1) und (10.7), angewandt auf $f(D)$.

Nun betrachten wir stetige Funktionen, die auf Intervallen definiert sind. Der folgende Satz enthält eine der wichtigsten Eigenschaften stetiger Funktionen.

(12.3) **Satz.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$*. Dann existiert ein* $x_0 \in (a, b)$ *mit* $f(x_0) = 0$*.*

Beweis. Wir definieren rekursiv eine Intervallschachtelung $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $J_n = [a_n, b_n]$, mit $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$: Setze $J_1 := [a, b]$. Ist J_n schon definiert, so setze

$$J_{n+1} := \begin{cases} [a_n, \frac{1}{2}(a_n + b_n)], & \text{falls } f(\frac{1}{2}(a_n + b_n)) \geq 0, \\ \\ [\frac{1}{2}(a_n + b_n), b_n], & \text{falls } f(\frac{1}{2}(a_n + b_n)) < 0. \end{cases}$$

Die Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die angegebenen Eigenschaften. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert ein $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$. Aus der Stetigkeit von f und (11.5) folgt wegen $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0$

$$0 \geq \lim f(a_n) = f(x_0) = \lim f(b_n) \geq 0,$$

also $f(x_0) = 0$. ■

Bemerkung. Das Beweisverfahren ist konstruktiv, d.h. es kann zur näherungsweisen Berechnung einer Nullstelle verwendet werden.

(12.4) **Satz** (Zwischenwertsatz). *Eine auf einem Intervall definierte stetige reelle Funktion nimmt jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten an.*

Beweis. Sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Seien u, v zwei Werte von f, o.B.d.A. $u < v$. Es gibt also Elemente $a, b \in D$ mit $f(a) = u$, $f(b) = v$. Sei nun $u < z < v$. Im Fall $a < b$ wende man (12.3) an auf die Funktion

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - z$$

im Fall $a > b$ auf die Funktion

$$g : [b, a] \to \mathbb{R} : x \mapsto -f(x) + z.$$

■

Anwendungsbeispiel: Jede Polynomfunktion ungeraden Grades hat eine Nullstelle.

Gleichmäßige Stetigkeit

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die Definition der (globalen) Stetigkeit. Daß $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist, bedeutet definitionsgemäß:

$$\forall x \in D \ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall y \in D : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Hier ist also zu gegebenem $x \in D$ und gegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein δ zu finden, so daß die rechts stehende Aussage gilt. Im allgemeinen wird (bei festem ϵ) dieses δ von dem vorgegebenem x abhängen. Beispiel:

$$f : (0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Je näher x bei 0 liegt, umso kleiner muß (bei festem ϵ) das δ gewählt werden; es gibt kein $\delta \in \mathbb{R}^+$, mit dem man für alle $x \in D$ auskommt. Manche Konstruktionen und Beweise der Analysis sind aber nur möglich, wenn sich ein solches δ einheitlich für den ganzen Definitionsbereich wählen läßt. Funktionen, für die dies der Fall ist, heißen gleichmäßig stetig.

Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Kurz: f ist gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D \ \forall y \in D : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Wie das obige Beispiel zeigt, ist nicht jede stetige Funktion gleichmäßig stetig. Daß diese Beispielfunktion unbeschränkt ist, ist nicht der entscheidende Punkt. Zum Beispiel wird eine beschränkte, stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$f(x) := \begin{cases} n(n+1)x - n & \text{für } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \ n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}, \\ \\ -n(n+1)x + n + 1 & \text{für } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \ n \in \mathbb{N} \text{ gerade}. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß so etwas nicht passieren kann, wenn der Definitionsbereich kompakt ist.

(12.5) **Satz.** *Jede stetige Funktion mit kompaktem Definitionsbereich ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei D kompakt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Zu jedem $a \in D$ existiert, da f in a stetig ist, ein $\delta(a) \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{mit } |x - a| < \delta(a).$$

Das System $\{U_{\frac{1}{2}\delta(a)}(a) \mid a \in D\}$ ist eine offene Überdeckung von D, enthält also nach (10.8) eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\frac{1}{2}\delta(a_i)}(a_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. Setze

$\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta(a_1), \ldots, \frac{1}{2}\delta(a_n)\}$. Seien dann $x, y \in D$ Punkte mit $|x - y| < \delta$. Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $x \in U_{\frac{1}{2}\delta(a_i)}(a_i)$. Wegen $|a_i - x| < \frac{1}{2}\delta(a_i) < \delta(a_i)$ ist

$$|f(a_i) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wegen $|a_i - y| \leq |a_i - x| + |x - y| \leq \frac{1}{2}\delta(a_i) + \delta \leq \delta(a_i)$ ist

$$|f(a_i) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(y)| < \epsilon.$$

Das angegebene δ leistet also das Gewünschte. ■

Kapitel 5: Spezielle Funktionen

In diesem Kapitel definieren und untersuchen wir einige spezielle Funktionen, die in der Analysis und ihren Anwendungen häufig verwendet werden.

13 Logarithmus und allgemeine Potenz

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, wie in §9 gezeigt wurde, streng monoton wachsend. Ihre Umkehrfunktion existiert also, sie ist nach (5.1) ebenfalls streng monoton wachsend und nach (11.8) stetig. In §12 wurde gezeigt, daß exp stetig ist. Aus der Reihendarstellung folgt

$$e^x \geq 1 + x \qquad \text{für } x \geq 0$$

und daraus, ebenfalls für $x \geq 0$,

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x},$$

also gilt $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Aus dem Zwischenwertsatz (12.4) folgt, daß das Bild der Exponentialfunktion gleich $\mathbb{R}^+$ ist (beachte $e^x > 0$ für alle x). Wir können daher formulieren:

(13.1) **Satz und Definition.** *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}^+$ definiert, stetig und streng monoton wachsend; sie heißt (natürliche) Logarithmusfunktion und wird mit* $\exp^{-1} = \ln$ *bezeichnet.*

(13.2) **Satz** (Funktionalgleichung der ln-Funktion): *Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt*

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Beweis. Setze $\ln x =: a$, $\ln y =: b$. Dann ist $x = e^a$, $y = e^b$, also nach (9.3) $xy = e^a e^b = e^{a+b}$ und daher $\ln xy = a + b = \ln x + \ln y$. ■

Bemerkung. Für $x \in \mathbb{R}^+$ folgt

$$\ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \ln 1 = 0$$

(wegen $e^0 = 1$), also

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x.$$

Definition. Für $a \in \mathbb{R}^+$ schreibt man

$$a^x := \exp_a x := e^{x \ln a} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ heißt *Exponentialfunktion* oder *Potenz zur Basis a*.

Für die allgemeine Potenz a^x stellen wir einige Rechenregeln zusammen:

(13.3) **Satz.** *Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*
(a) $a^x a^y = a^{x+y}$,
(b) $(a^x)^y = a^{xy}$,
(c) $a^x b^x = (ab)^x$,
(d) $(\frac{1}{a})^x = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Beweis. (a) $a^x a^y = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$.
(b) Wegen $a^x = e^{x \ln a}$ ist $\ln a^x = x \ln a$, also $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{yx \ln a} = a^{xy}$.
(c) $a^x b^x = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln ab} = (ab)^x$.
(d) $(\frac{1}{a})^x = e^{x \ln \frac{1}{a}} = e^{-x \ln a} = a^{-x} = \frac{1}{e^{x \ln a}} = \frac{1}{a^x}$. ∎

Bemerkung. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ schreibt man auch

$$a^{\frac{1}{n}} =: \sqrt[n]{a}$$

(n-te Wurzel aus a). Nach (13.3)(b) ist

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a.$$

Die n-te Wurzel $\sqrt[n]{\ }$ ist also die Umkehrfunktion der n-ten Potenz $a \mapsto a^n$. (Wir haben die n-te Wurzel schon mehrfach benutzt, aber erst jetzt definiert.)

Offenbar ist auch die Exponentialfunktion zur Basis a stetig. Im Fall $a > 1$ ist sie (wegen $\ln a > 0$) streng monoton wachsend, im Fall $0 < a < 1$ ist sie (wegen $\ln a < 0$) streng monoton fallend. Für $a \neq 1$ existiert also ihre Umkehrfunktion; sie heißt *Logarithmusfunktion zur Basis a* und wird mit $\log_a$ bezeichnet. Sie unterscheidet sich nur um einen festen Faktor von der natürlichen Logarithmusfunktion: Setzen wir $\log_a x =: y$, so ist

$$x = a^y = e^{y \ln a},$$

also $\ln x = y \ln a$ und daher

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Es genügt daher, die natürliche Logarithmusfunktion (also die zur Basis e) zu kennen.

Hinweis. Die Schreibweisen für die Logarithmusfunktionen sind in der Literatur nicht einheitlich. So wird für ln gelegentlich auch log geschrieben; oft ist mit log auch $\log_{10}$ gemeint.

Einige Grenzwerte

Wir wollen einige mit der Exponential- und Logarithmusfunktion gebildete Grenzwerte bestimmen, die häufig auftreten.

(13.4) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis. $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n}\ln a} \to e^0 = 1$ für $n \to \infty$ wegen der Stetigkeit der e-Funktion und (11.4).

(13.5) **Beh.:** $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$.

Beweis. Für alle $x > 0$ gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

woraus die Behauptung folgt.

(13.6) **Beh.:** $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$.

Beweis. $x^k e^{-x} = (\frac{e^x}{x^k})^{-1}$ und (13.5).

(13.7) **Beh.:** $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

Beweis:

$$\lim_{x\searrow 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k e^y = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^k} = \infty.$$

(13.8) **Beh.:** $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Beweis: Zu gegebenem $c \in \mathbb{R}$ setze $c_0 := e^c$. Für alle $x \geq c_0$ gilt dann $\ln x \geq c$. Also ist $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Ferner gilt

$$\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{y\to\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y\to\infty} \ln y = -\infty.$$

(13.9) **Beh.:** $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : \lim_{x\searrow 0} x^\alpha = 0$.

Beweis: Zu gegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert wegen (13.8) ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \ln x < \ln \epsilon$ für $0 < x < \delta$. Aus $0 < x < \delta$ folgt dann

$$0 < x^\alpha = e^{\alpha \ln x} < e^{\ln \epsilon} = \epsilon.$$

(13.10) **Beh.:** $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ : \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wegen (13.5) existiert ein $c_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \frac{1}{\alpha}\frac{y}{e^y} < \epsilon \qquad \text{für } y > c_0.$$

Wegen (13.8) existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \ln x > c_0$ für $x > c$. Für alle $x > c$ gilt also

$$0 < \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha \ln x}{e^{\alpha \ln x}} < \epsilon.$$

(13.11) **Beh.:** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to e^0 = 1$ für $n \to \infty$ wegen (13.10).

14 Die Exponentialfunktion im Komplexen

Um bequem die trigonometrischen Funktionen einführen und untersuchen zu können, ist es zweckmäßig, die Exponentialfunktion auch für komplexe Argumente zur Verfügung zu haben. Wir werden daher jetzt die hierzu erforderlichen Grundbegriffe und Sätze der Analysis unter Zugrundelegung des Körpers der komplexen Zahlen entwickeln.

Ein Anlaß zur Einführung der komplexen Zahlen ist zum Beispiel die Tatsache, daß im Bereich der reellen Zahlen nicht jede „quadratische Gleichung“ lösbar ist. So gibt es etwa keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$ (denn es ist $-1 < 0$, und nach (2.9) gilt $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Man erweitert daher den Bereich der reellen Zahlen in geeigneter Weise, was man formal folgendermaßen tun kann.

$\mathbb{C}$ sei die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der geordneten Paare reeller Zahlen. Addition und Multiplikation der Elemente von $\mathbb{C}$ werden erklärt durch

$$\begin{aligned}(a,b) + (c,d) &:= (a+c, b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &:= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

für $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$. Das Tripel $(\mathbb{C},+,\cdot)$ erfüllt die in §1 zusammengestellten Körperaxiome, wie man durch elementare Rechnungen leicht nachweist. Man bezeichnet $(\mathbb{C},+,\cdot)$ oder kurz $\mathbb{C}$ als den *Körper der komplexen Zahlen* und die Elemente als komplexe Zahlen.