Wegen

$$\begin{aligned}(a,0)+(c,0) &= (a+c,0)\\ (a,0)\cdot(c,0) &= (ac,0)\end{aligned}$$

kann man die Teilmenge $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ mit den darauf eingeschränkten Verknüpfungen identifizieren mit dem Körper der reellen Zahlen. Statt $(a,0)$ schreibt man daher a. Ferner setzt man zur Abkürzung

$$(0,1) =: i$$

und nennt diese komplexe Zahl die *imaginäre Einheit*. Dann ist $i^2 = -1$.

Mit diesen Vereinbarungen ist jetzt für $(a,b) \in \mathbb{C}$

$$(a,b) = (a,0)(1,0) + (b,0)(0,1) = a + bi.$$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann also in der Form $z = a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden, und zwar eindeutig, denn aus $a+ib = a'+ib'$ mit $a,b,a',b' \in \mathbb{R}$, also $(a,b) = (a',b')$, folgt $a = a'$ und $b = b'$ nach der Gleichheitsdefinition für geordnete Paare.

Definition. Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z) &:= a \qquad \text{der } \textit{Realteil} \text{ und}\\ \mathrm{Im}(z) &:= b \qquad \text{der } \textit{Imaginärteil}\end{aligned}$$

von z. Die komplexe Zahl

$$\overline{z} := a - ib$$

heißt die zu z *konjugiert-komplexe* Zahl.

(14.1) **Behauptung.** Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$,

(b) $\overline{\overline{z}} = z$

(c) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

(d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$

Beweis. trivial (nachrechnen)

Nachdem wir den Körper der reellen Zahlen ausgedehnt haben zum Körper der komplexen Zahlen, stellt sich die Frage, ob auch die Beziehung $<$ von den reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen fortgesetzt werden kann. Dabei würde man natürlich fordern, daß die Anordnungsaxiome aus §2, die die Verträglichkeit dieser Kleinerbeziehung mit den Körperverknüpfungen regeln, erfüllt sind. Dies ist aber nicht möglich, da in einem angeordneten Körper nach (2.9) für jedes Körperelement a die Beziehung $a^2 \geq 0$ gilt, während doch $i^2 = -1 < 0$ ist.

Eine eingehendere Durchsicht der Konvergenzbetrachtungen in den vorhergehenden Abschnitten zeigt nun aber, daß dabei gar nicht so sehr von der Größerbeziehung Gebrauch gemacht wurde, sondern vorwiegend von den daraus abgeleiteten Eigenschaften des Absolutbetrages. Ein Absolutbetrag mit ähnlichen Eigenschaften läßt sich nun auch für komplexe Zahlen erklären, und dies hat zur Folge, daß man auch im Bereich der komplexen Zahlen eine weitgehend analoge Konvergenztheorie aufbauen kann.

<u>Definition.</u> Für $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ heißt

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

der *Betrag* von z.

Der Betrag einer komplexen Zahl ist also eine nichtnegative reelle Zahl. Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt diese Definition mit der früher für den Absolutbetrag gegebenen überein. Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|\overline{z}| = |z|$, ferner $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

(14.2) **Satz.** *Für* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt*
(a) $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
(b) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. (a) ist trivial.
(b) $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$.
(c) Unter Verwendung von

$$\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2) \leq |z_1 \overline{z}_2| = |z_1||\overline{z}_2| = |z_1||z_2|$$

folgt

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1 \overline{z}_1 + z_1 \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

■

Wir sind nun in der Lage, die Konvergenzbetrachtungen der vorhergehenden Paragraphen weitgehend vom Reellen ins Komplexe zu übertragen. Alle Behauptungen und Beweise, die nicht von der Anordnung der reellen Zahlen, sondern (außer von den Körperaxiomen) nur vom Absolutbetrag und seinen Eigenschaften Gebrauch machten, bleiben ohne Änderungen gültig. Die Resultate, deren Beweise sich wörtlich übertragen lassen, werden wir nur auflisten, ohne die Begründungen zu wiederholen.

Definition. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Die Folge (z_n) heißt *konvergent* gegen z, und z heißt *Grenzwert* dieser Folge, geschrieben $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, wenn gilt

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon).$$

Die Sätze (7.1) (Eindeutigkeit des Grenzwertes), (7.2) (Beschränktheit konvergenter Folgen; $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $|z_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$), (7.3) (Rechenregeln für Grenzwerte) und ihre Beweise lassen sich wörtlich übertragen.

Andere Aussagen von früher lassen sich nicht verallgemeinern, weil sie in $\mathbb{C}$ sinnlos sind. Zum Beispiel kann man nicht von einer monotonen Folge komplexer Zahlen sprechen.

Der folgende Satz gestattet es, Konvergenz im Komplexen zurückzuführen auf Konvergenz im Reellen:

(14.3) **Satz.** *Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt:*

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergent } \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ und } (\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergent.}$$

Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Beweis. Unter Verwendung der Abschätzungen

$$|a|, |b| \leq |a + ib| \leq |a| + |b|$$

ergibt sich dies folgendermaßen. Setze $z_n = a_n + ib_n, z = a + ib$.

Sei $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \epsilon$ für $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt also $|a_n - a| \leq |z_n - z| < \epsilon$. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Analog folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Gelte $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq n_1$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq n_2$. Für $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt also $|z_n - z| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon$ mit $z = a + ib$. Daraus folgt die Behauptung. ∎

<u>Definition.</u> $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : |z_m - z_n| < \epsilon.$$

(14.4) **Satz.** *Die Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{C}$ *ist genau dann Cauchy-Folge, wenn* $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folgen sind.*

Beweis. Analog zum Beweis von (14.3). ■

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen und dem Cauchy-Kriterium (7.8) im Reellen folgt jetzt sofort:

(14.5) **Satz.** *Eine Folge in* $\mathbb{C}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Reihen komplexer Zahlen und ihre Konvergenz werden genau wie im Reellen erklärt. So bezeichnet $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ sowohl die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ als auch, wenn die Reihe konvergiert, ihren Grenzwert, und $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z$ bedeutet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = z$.

<u>Definition.</u> Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

konvergiert.

Die folgenden Sätze über Konvergenz und ihre Beweise lassen sich nun wörtlich übertragen.

(8.3) Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen

(8.6) Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz

(8.7) Umordnungssatz

(8.8) Majorantenkriterium

(8.9) Quotientenkriterium

(8.10) Wurzelkriterium

(8.11) Cauchy-Produkt

Nun können wir durch wörtliche Übertragung der Beweise die Betrachtungen aus §9 über die Exponentialreihe ins Komplexe ausdehnen.

(14.6) **Satz.** *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis wie für (9.1).

Definition: $\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$.

(14.7) **Satz.** *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z+w} = e^z e^w$.*

Beweis wie für (9.3).

Folgerung. $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, denn $e^z e^{-z} = 1$.

(14.8) **Beh.:** $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ für $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Mit $s_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ gilt nach (14.1)

$$s_n(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{s_n(z)},$$

also wegen (14.3)

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{\lim \mathrm{Re}(s_n(z)) + i \lim \mathrm{Im}(s_n(z))} \\ &= \lim \mathrm{Re}(s_n(z)) - i \lim \mathrm{Im}(s_n(z)) \\ &= \lim(\overline{s_n(z)}) = \lim s_n(\overline{z}) = e^{\overline{z}}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Folgerung. Ist $z \in \mathbb{C}$ rein imaginär, d.h. $z = ix$ mit $x \in \mathbb{R}$, so ist $|e^z| = 1$. Denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{\overline{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$.

15 Die trigonometrischen Funktionen

Das Ziel unseres Ausfluges ins Komplexe war es, jetzt in bequemer Weise die Funktionen Sinus und Cosinus einführen zu können.

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ setzt man

$$\cos x := \mathrm{Re}(e^{ix}), \quad \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x, \\ \sin(-x) &= -\sin x, \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= |e^{ix}|^2 = 1. \end{aligned}$$

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergeben sich die Additionstheoreme der „trigonometrischen Funktionen“ sin und cos:

(15.1) **Satz** (Additionstheoreme). *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} & \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} \\ = & (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ = & (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y). \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Behauptung. ■

(15.2) **Satz.** *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots, \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots. \end{aligned}$$

Beide Reihen sind absolut konvergent.

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt nach dem Majorantenkriterium aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe. Es ist

$$\begin{aligned}\cos x + i\sin x = e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n x^n}{n!}\\ = \quad & \frac{1}{0!}+i\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-i\frac{x^7}{7!}+\cdots\\ = \quad & \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\right)+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\right),\end{aligned}$$

wobei (14.3) benutzt wurde. Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt die Behauptung. ■

(15.3) **Satz.** *Für die durch*

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+2}(x),\\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2n+3}(x)\end{aligned}$$

definierten Restglieder gilt die Abschätzung

$$|R_m(x)| \le \frac{|x|^m}{m!} \qquad \text{für } |x| \le m+1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}|R_{2n+2}(x)| &= \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|1-\frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)}+\frac{x^4}{(2n+3)\cdots(2n+6)}-\dots\right|\\ &= \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,|1-a_1+a_2-\dots|\end{aligned}$$

mit

$$a_k := \frac{x^{2k}}{(2n+3)\cdots(2n+2k+2)}.$$

Wegen

$$a_k = a_{k-1}\frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)}$$

gilt für $|x| \le 2n+3$ die Ungleichungskette $1 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots$, also $0 \le 1-a_1+a_2-a_3+\cdots \le 1$. Analog schließt man für $R_{2n+3}(x)$. ■

Als Folgerung notieren wir:

(15.4) **Beh.:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis. Nach (15.3) ist $|\sin x - x| \le \frac{|x|^3}{6}$ für $|x| \le 4$, woraus nach Division durch x die Behauptung folgt.

(15.5) **Satz.** $\cos$ *und* $\sin$ *sind stetig.*

Beweis. Satz (9.2) gilt mit demselben Beweis auch für $x \in \mathbb{C}$. Für $z, w \in \mathbb{C}$ ist also $|e^z - e^w| \le 2|e^w||z - w|$ für $|z - w| \le 1$. Für $x, a \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| \le 1$ folgt also

$$|\cos x - \cos a| = |\mathrm{Re}(e^{ix} - e^{ia})| \le |e^{ix} - e^{ia}| \le 2|x - a|,$$

woraus die Stetigkeit von cos folgt. Analog für sin. ■

Die Zahl π.

Die Zahl π, klassisch definiert als das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser, werden wir hier auf ganz andere Weise einführen. Erst wesentlich später ergibt sich der Zusammenhang mit dem Kreisumfang. Die nachfolgenden Behauptungen dienen zur Vorbereitung.

(15.6) **Beh.:** $\sin x > 0$ für $x \in (0, 2)$.

Beweis. Nach (15.3) ist

$$\sin x = x \left(1 + \frac{R_3(x)}{x}\right)$$

mit

$$\left|\frac{R_3(x)}{x}\right| \le \frac{|x|^2}{6} \qquad \text{für } |x| \le 4.$$

Für $x \in (0, 2]$ gilt also $\left|\frac{R_3(x)}{x}\right| \le \frac{2}{3}$ und daher

$$\sin x = x \left(1 + \frac{R_3(x)}{x}\right) \ge x \cdot \frac{1}{3} > 0.$$

■

(15.7) **Beh.:** In $[0, 2]$ ist cos streng monoton fallend.

Beweis. Mit $\frac{x+y}{2} =: u$, $\frac{x-y}{2} =: v$ folgt aus (15.1)

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ \cos y &= \cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v, \end{aligned}$$

also

$$-\cos x + \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Für $0 \leq y < x \leq 2$ ist nach (15.6) die rechte Seite positiv. ∎

(15.8) **Beh.:** $\cos 2 < 0$.

Beweis. Nach (15.3) ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x) \quad \text{mit } |R_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{4!} \quad \text{für } |x| \leq 5,$$

also insbesondere

$$\cos 2 = 1 - 2 + R_4(2) \quad \text{mit } |R_4(2)| \leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3},$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

Über die Funktion $f := \cos|[0,2]$ wissen wir nun: f ist stetig, $f(0) = 1$, $f(2) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (12.4) existiert ein $x_0 \in (0,2)$ mit $f(x_0) = 0$. Wegen (15.7) gibt es nur ein solches x. Wir können also definieren:

Definition. Die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion cos im Intervall $(0,2)$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

Näherungsweise Berechnung ergibt

$$\pi = 3,141592653 \pm 10^{-9}.$$

Aus $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ergeben sich einige spezielle Werte für die Funktionen sin, cos, exp: Es ist

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1,$$

wegen (15.6) also

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

folglich

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Daraus folgt $e^{\pi i} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$ und hieraus

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Zusammen mit den Additionstheoremen (15.1) liefert das:

(15.9) **Satz.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x & \qquad \sin(x+2\pi) &= \sin x \\ \cos(x+\pi) &= -\cos x & \sin(x+\pi) &= -\sin x \\ \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x.$$

(15.10) **Satz.**

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} &= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} &= \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Beweis. $\sin k\pi = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ ist klar. Sei jetzt $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $\sin x = 0$. Wir können $x = k\pi + x_1$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $x_1 \in [0, \pi)$ schreiben. Dann ist

$$\sin x_1 = \sin(x - k\pi) = \sin x \cos k\pi - \cos x \sin k\pi = 0.$$

Nun gilt nach (15.6): $\sin x_1 > 0$ für $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Für $x_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ ist $\sin x_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - x_1) = \cos(x_1 - \frac{\pi}{2}) > 0$ wegen $x_1 - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2})$ und der Definition von $\pi/2$. Also muß $x_1 = 0$ sein, d.h. $x = k\pi$.

Wegen $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ folgt die zweite Gleichheit aus der ersten. ∎

Nachdem wir jetzt die Nullstellen von sin und cos kennen, können wir definieren:

<u>Definition</u>

$$\begin{aligned} &\text{Tangens}: & \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x} & &\text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &\text{Cotangens}: & \cot x &:= \frac{\cos x}{\sin x} & &\text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Weitere wichtige spezielle Funktionen ergeben sich als Umkehrfunktionen der bisher eingeführten Funktionen. Da die trigonometrischen Funktionen aber nicht injektiv sind, existieren Umkehrfunktionen nur für geeignete Einschränkungen.

(15.11) **Satz und Definition.**
(a) *Die Einschränkung* $\cos|[0,\pi]$ *ist streng monoton fallend und eine bijektive Abbildung auf* $[-1,1]$. *Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \textit{(Arcus Cosinus)}$$

bezeichnet.
(b) $\sin|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv auf* $[-1,1]$. *Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad \textit{(Arcus Sinus)}$$

bezeichnet.
(c) $\tan|(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv auf* $\mathbb{R}$. *Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \textit{(Arcus Tangens)}$$

bezeichnet.
(d) $\cot|(0,\pi)$ *ist streng monoton fallend und bijektiv auf* $\mathbb{R}$. *Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \textit{(Arcus Cotangens)}$$

bezeichnet.

Wir verzichten auf die Beweise, da sie mit Hilfe der bisher bekannten Ergebnisse sehr leicht zu erbringen sind.

Als Anwendung leiten wir eine besondere Darstellung der komplexen Zahlen her:

(15.12) **Satz.** *Jede komplexe Zahl* $z \in \mathbb{C}$ *ist darstellbar in der Form*

$$z = re^{i\varphi}$$

mit $r = |z|$ *und einer reellen Zahl* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *(genannt das* Argument *von* z*). Für* $z \neq 0$ *ist* φ *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot e^{i\varphi}$ mit beliebigem φ. Sei $z \neq 0$, $r := |z|$ und $\frac{z}{r} = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wegen $|\frac{z}{r}| = 1$ ist $x^2 + y^2 = 1$, also $x \in [-1,1]$. Daher ist $\alpha := \arccos x$ definiert. Wegen $\cos\alpha = x$ ist $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - x^2 = y^2$, also $\sin\alpha = \pm y$. Setze

$$\varphi := \begin{cases} \alpha, \text{ falls } \sin\alpha = y \\ 2\pi - \alpha, \text{ falls } \sin\alpha = -y \text{ und } \alpha \neq 0. \end{cases}$$