Zur Fehlerabschätzung schreiben wir

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{h} f(x)\,dx$$

und erhalten für das rechte Integral durch zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{h} f(x)\,dx &= [(x-h)f(x)]_0^h - \int_0^h (x-h)f'(x)\,dx \\
&= hf(0) + \left[-\frac{1}{2}(x-h)^2 f'(x)\right]_0^h + \int_0^h \frac{1}{2}(x-h)^2 f''(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}h^2 f'(0) + \int_0^h \frac{1}{2}(x-h)^2 f''(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\int_{-h}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}h^2 f'(0) + \int_{-h}^{0} \frac{1}{2}(x+h)^2 f''(x)\,dx,$$

also

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = B + \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} g(x) f''(x)\,dx$$

mit

$$g(x) := \begin{cases} (x+h)^2 \text{ für } -h \le x \le 0, \\ (x-h)^2 \text{ für } 0 \le x \le h. \end{cases}$$

Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ergibt

$$\int_{-h}^{h} g(x) f''(x)\,dx = f''(c) \int_{-h}^{h} g(x)\,dx = f''(c)\frac{2}{3}h^3,$$

also

$$\left| \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - B \right| \le \frac{1}{3}h^3 \|f''\|.$$

Bemerkung. Eine besonders gute Näherung ist durch $C := \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$, also durch

$$C = \frac{h}{3}\left[f(-h) + 4f(0) + f(h)\right]$$

gegeben. Für Funktionen f, die auf $[-h, h]$ 4-mal stetig differenzierbar sind, läßt sich die Abschätzung

$$\left| \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - C \right| \leq \frac{1}{90} h^5 \|f^{(4)}\|$$

beweisen (Simpson-Regel).

23 Parameterabhängige Integrale

In der Taylorschen Formel (21.3) hatten wir das Restglied in der Form

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{a}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

angegeben. Dies ist ein Beispiel für ein „parameterabhängiges Integral“. Im Integranden und in der oberen Grenze kommt ein „Parameter“ vor, d.h. eine Zahl, die aus einer gegebenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ gewählt werden kann, so daß also durch das Integral eine auf dieser Teilmenge definierte Funktion erklärt wird. Wir wollen Eigenschaften einer so erklärten Funktion betrachten; dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß der Parameter im Integranden vorkommt. Zur exakten Formulierung benötigen wir den Begriff einer „Funktion von zwei Veränderlichen“.

Wir bezeichnen das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, also die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen, mit $\mathbb{R}^2$.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt „Funktion von zwei (reellen) Veränderlichen“. Statt $f((x, y))$ schreibt man $f(x, y)$.

Die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \;\; \forall (x, t), (x', t') \in A :$$

$$|x - x'| < \delta \wedge |t - t'| < \delta \Rightarrow |f(x, t) - f(x', t')| < \epsilon.$$

Ist $D, [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : D \times [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist insbesondere für jedes $x \in D$ die Funktion

$$f(x, \cdot) : [a, b] \to \mathbb{R} \colon t \mapsto f(x, t)$$

stetig und daher eine Regelfunktion. Wir können also

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt \qquad \text{für } x \in D$$

definieren. Wir fragen jetzt nach Eigenschaften dieser Funktion F wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Es sei darauf hingewiesen, daß die im folgenden getroffenen Voraussetzungen wesentlich stärker sind als notwendig wäre. (Für allgemeinere Aussagen siehe z.B. Barner-Flohr.) Wir begnügen uns jedoch mit diesen einfach zu beweisenden Resultaten, die für viele Anwendungen ausreichen.

(23.1) **Satz.** *Sei $D, [a,b] \subset \mathbb{R}$, sei $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist die durch*

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt \qquad \text{für } x \in D$$

definierte Funktion F stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x,t) - f(x',t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $t \in [a,b]$ und alle $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$.
Für $x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ folgt also

$$|F(x) - F(x')| \le \int_a^b |f(x,t) - f(x',t)|\,dt \le \epsilon.$$

■

Jetzt fragen wir nach der Differenzierbarkeit von F. Sie erfordert natürlich eine geeignete Differenzierbarkeitsvoraussetzung an f.

Definition. Sei $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *partiell differenzierbar nach der ersten Veränderlichen*, wenn für alle $t \in [a,b]$ die Funktion

$$f(x,\cdot) : D \to \mathbb{R} \colon x \mapsto f(x,t)$$

differenzierbar ist. Ihre Ableitung an der Stelle x wird dann mit $\partial_1 f(x,t)$ bezeichnet. Die Funktion

$$\partial_1 f : D \times [a,b] \to \mathbb{R} \colon (x,t) \mapsto \partial_1 f(x,t)$$

heißt *partielle Ableitung von f nach der ersten Veränderlichen.*

(23.2) **Satz.** *Sei $[c,d],[a,b]\subset\mathbb{R}$, sei $f:[c,d]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, deren partielle Ableitung $\partial_1 f$ existiert und gleichmäßig stetig ist. Dann ist die durch*

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt \qquad \text{für } x\in[c,d]$$

definierte Funktion F differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \partial_1 f(x,t)\,dt$$

(„Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration").

Beweis. Sei $x\in[c,d]$ und $\epsilon\in\mathbb{R}^+$ gegeben. Für $h\neq 0$ mit $x+h\in[c,d]$ gilt

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b \partial_1 f(x,t)\,dt = \int_a^b \left[\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} - \partial_1 f(x,t)\right] dt.$$

Für jedes $t\in[a,b]$ wenden wir auf die Funktion $f(\cdot,t)$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (17.2) an. Danach existiert ein $\vartheta_t\in(0,1)$ mit

$$\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} = \partial_1 f(x+\vartheta_t h,t).$$

Nach Voraussetzung ist $\partial_1 f$ gleichmäßig stetig, also existiert ein $\delta\in\mathbb{R}^+$ mit

$$|\partial_1 f(x,t)-\partial_1 f(x',t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $t\in[a,b]$ und alle $x,x'\in[c,d]$ mit $|x-x'|<\delta$.

Sei $|h|<\delta$. Dann gilt $|x-(x+\vartheta_t h)| = \vartheta_t|h| < \delta$, also

$$\left|\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} - \partial_1 f(x,t)\right| = |\partial_1 f(x+\vartheta_t h,t) - \partial_1 f(x,t)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

und daher

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \int_a^b \partial_1 f(x,t)\,dt\right| < \epsilon.$$

■

Nun fragen wir analog, ob man „unter dem Integralzeichen integrieren“ darf.

(23.3) **Satz.** *Sei $f : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann gilt*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,dx \right) dt$$

(„Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge“).

Beweis. Setze

$$G(y) := \int_c^y \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right) dx \qquad \text{für } y \in [c,d].$$

Nach (23.1) ist der Integrand des äußeren Integrals stetig; nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (21.1) ist daher G differenzierbar und

$$G'(y) = \int_a^b f(y,t)\,dt.$$

Setze

$$H(y) := \int_a^b \left(\int_c^y f(x,t)\,dx \right) dt \qquad \text{für } y \in [c,d].$$

Die durch

$$h(y,t) := \int_c^y f(x,t)\,dx \qquad \text{für } (y,t) \in [c,d] \times [a,b]$$

definierte Funktion h ist (wieder nach (21.1) partiell differenzierbar nach der ersten Veränderlichen, und es gilt

$$\partial_1 h = f.$$

Also ist $\partial_1 h$ gleichmäßig stetig. Nach (23.2) folgt die Differenzierbarkeit der Funktion H und die Gleichung

$$H'(y) = \int_a^b \partial_1 h(y,t)\,dt = \int_a^b f(y,t)\,dt.$$

Es ist also $(G-H)' = 0$ und daher $G - H = \text{const}$. Wegen $G(c) = 0 = H(c)$ ist $G = H$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Durch ein Beispiel wollen wir noch zeigen, daß man die Integrationsreihenfolge keineswegs immer vertauschen darf.

Beispiel. Die Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y < 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $y = 0$ oder $y = 1$, so ist $f(x,y) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Sei $y \in (0,1)$. Dann ist

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y \\ 0 & \text{für } x = y \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } y < x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Also ist $f(\cdot, y)$ auf dem Intervall $(0,y)$ konstant und auf dem Intervall $(y,1)$ Einschränkung einer auf $[y,1]$ stetigen Funktion. Es folgt, daß $f(\cdot, y)$ Regelfunktion ist. Daher ist das Integral

$$F(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

definiert. Es ist $F(0) = F(1) = 0$. Sei $y \in (0,1)$. Dann ist

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{y^2}\,dx + \int_y^1 \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{y^2}x\right]_{x=0}^{x=y} + \left[\frac{1}{x}\right]_{x=y}^{x=1} = 1.$$

Also ist F Regelfunktion und

$$\int_0^1 F(y)\,dy = 1.$$

Analog findet man, daß für jedes $x \in [0,1]$ die Funktion $f(x,\cdot)$ Regelfunktion ist und daß

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int_0^1 f(x,y)\,dy \\ &= \int_0^x \left(-\frac{1}{x^2}\right) dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}\,dy = -1 \end{aligned}$$

für $x \in (0,1)$ sowie $G(0) = G(1) = 0$ gilt. Also ist G Regelfunktion und $\int_0^1 G(x)dx = -1$. Damit ist

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 1 \neq -1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$$

gezeigt.

24 Uneigentliche Integrale

Bisher können wir nur Regelfunktionen integrieren. Eine solche Funktion ist stets auf einem kompakten Intervall definiert und beschränkt. Es kommt jedoch häufig vor, daß Funktionen über unendliche Intervalle oder unbeschränkte Funktionen zu integrieren sind. In naheliegender Weise können solche Integrale durch Grenzübergänge definiert werden. Wir betrachten zunächst den Fall eines unbeschränkten Integrationsintervalls.

<u>Definition.</u> Sei $a \in \mathbb{R}$, sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß für jedes $b \in [a,\infty)$ die Einschränkung $f|[a,b]$ eine Regelfunktion ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

existiert, bezeichnet man ihn mit $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und sagt, daß das (uneigentliche) Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert.*

Ganz analog definiert man $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig und die rechte Seite offenbar unabhängig von a ist.

Im folgenden wird von allen auftretenden Funktionen stillschweigend vorausgesetzt, daß ihre Einschränkungen auf kompakte Intervalle Regelfunktionen sind.

Für die Konvergenz uneigentlicher Integrale gilt das folgende Cauchy-Kriterium.

(24.1) **Satz** (Cauchy-Kriterium). *Das Integral* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert*

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists u \in \mathbb{R} \ \forall x_1, x_2 \geq u : \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \epsilon.$$

Der Satz ist analog zum Cauchy-Kriterium (8.3) für Reihen und zum Cauchy-Kriterium (11.2) für Grenzwerte von Funktionen; man beweist ihn analog wie letzteres.

Beispiele.

(1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$. Für $b \geq 1$ und $s \neq 1$ ist

$$\int_1^b \frac{1}{x^s}\,dx = \left[\frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^b = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{b^{s-1}}\right).$$

Also ist das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$ konvergent für $s > 1$, nicht konvergent für $s < 1$. Für $s = 1$ ist es wegen $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b$ ebenfalls nicht konvergent.

(2) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Für $b \geq 0$ gilt

$$\int_{-b}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan x]_{-b}^0 = -\arctan(-b) \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } b \to \infty,$$

analog

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \to \frac{\pi}{2}, \qquad \text{also} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

(3) **Beh.:** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist konvergent (an der Stelle 0 ist der Integrand gleich 1 zu setzen; er ist dann stetig).

Beweis. Für $b > a > 0$ ergibt partielle Integration

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\cos x\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Für $x_2 > x_1 > \frac{1}{\epsilon}$ gilt

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} < \epsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium (24.1) ist also $\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ konvergent und daher auch $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konvergent.

Das Integralkriterium für Reihen

An dieser Stelle können wir ein Konvergenzkriterium für Reihen nachtragen, dessen Formulierung den Begriff des uneigentlichen Integrals erfordert.

(24.2) **Satz** (Integralkriterium für Reihen). *Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ eine monoton fallende Funktion. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\, dx$$

konvergent ist.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ und $k - 1 \leq x \leq k$ gilt $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$ und daher

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq f(k-1).$$

Summation ergibt

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Wegen $f \geq 0$ liest man hieran die Behauptung ab. ■

Beispiele:

(1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$ (vgl. Beispiel (1) nach (24.1)).

(2) **Beh.:** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ ist für $s > 1$ konvergent, für $s \leq 1$ divergent.

Beweis: Für $b \geq 2$ und $s \neq 1$ ist [Substitution $x = e^t$]

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^s}\,dt = \left[\frac{1}{1-s}\frac{1}{t^{s-1}}\right]_{\ln 2}^{\ln b} = \frac{1}{s-1}\left[\frac{1}{(\ln 2)^{s-1}} - \frac{1}{(\ln b)^{s-1}}\right].$$

Für $s > 1$ ist also $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^s}\,dx$ konvergent, für $s < 1$ divergent. Für $s = 1$ gilt

$$\int_2^b \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{\ln 2}^{\ln b} = \ln\ln b - \ln\ln 2,$$

also ist $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x}\,dx$ ebenfalls divergent. Daraus folgt die Behauptung.

Wir kommen zum zweiten Typ uneigentlicher Integrale, bei denen der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht erklärt ist und auch nicht so erklärt werden kann, daß eine Regelfunktion entsteht.

<u>Definition.</u> Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ (mit $\epsilon < b - a$) die Einschränkung $f|[a + \epsilon, b]$ eine Regelfunktion ist. Man sagt, „das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert“, wenn

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

existiert und bezeichnet dann diesen Grenzwert mit $\int_a^b f(x)\,dx$.

Analog wird $\int_a^b f(x)\,dx$ behandelt, wenn f nur auf $[a, b)$ erklärt ist. Ist f nur auf (a, b) erklärt, so bezeichnet man $\int_a^b f(x)\,dx$ als konvergent, wenn für ein (und dann für jedes a) $c \in (a, b)$ die Integrale

$$\int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

konvergieren; in diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beispiele.

(1) Wegen

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s}(1-\epsilon^{1-s}) & \text{für } s \neq 1 \\ -\ln\epsilon & \text{für } s = 1 \end{cases}$$

ist $\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$ für $s < 1$ konvergent, für $s \geq 1$ jedoch nicht.

(2) Wegen $\int_\epsilon^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_\epsilon^1 = -1 - \epsilon\ln\epsilon + \epsilon$ und $\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon\ln\epsilon = 0$ (wie aus (13.10) folgt) ist $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$.

(3) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konvergiert: Es ist

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^{1-\epsilon} = \arcsin(1-\epsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Analog $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

(4) Im Beispiel $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$ ist der Integrand beschränkt, aber $\lim_{x\searrow 0}\sin\frac{1}{x}$ existiert nicht; daher ist der Integrand nicht Einschränkung einer auf $[0,1]$ erklärten Regelfunktion.

Die Substitution $x = \frac{1}{t}$ ergibt

$$\int_\epsilon^1 \sin\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{\sin t}{t^2}\,dt.$$

Da das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}dt$ konvergiert (z.B. nach dem Cauchy-Kriterium), ist $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}dx$ konvergent.

Uneigentliche Parameterintegrale

Wir betrachten jetzt parameterabhängige uneigentliche Integrale. Hier liegen die Verhältnisse weniger einfach als bei den parameterabhängigen eigentlichen Integralen.

Beispiel: Sei

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1]\times[0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \dfrac{x}{1+t^2x^2}. \end{array}$$

Diese Funktion ist gleichmäßig stetig. Für $x \in (0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x,t)\,dt &= \int_0^b \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt \qquad [\text{ Substitution } tx = u] \\ &= \int_0^{bx} \frac{1}{1+u^2}\,du = [\arctan u]_0^{bx}, \end{aligned}$$

folglich

$$F(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist jedoch

$$F(0) := \int_0^\infty f(0,t)\,dt = 0.$$

Die Funktion F, die durch das uneigentliche Parameterintegral

$$F(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt, \qquad x \in [0,1],$$

definiert wird, ist also unstetig.

Abwandlung dieses Beispiels zeigt auch, daß man eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge i.a. nicht gliedweise uneigentlich integrieren darf; Satz (20.4) läßt sich also nicht übertragen auf uneigentliche Integrale: Setze

$$f_n(t) := \frac{n}{n^2+t^2} \qquad \text{für } t \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion; aber es ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt.$$

Bei uneigentlichen Parameterintegralen wird die gleichmäßige Konvergenz eine wesentliche Rolle spielen. Wir beschränken uns im folgenden auf uneigentliche

Integrale des ersten Typs, also solche mit unendlichem Integrationsintervall. Für die anderen Typen lassen sich Definitionen und Sätze sinngemäß übertragen.

Definition. Sei $f : D \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß für jedes $x \in D$ und jedes $b \in [a, \infty)$ die Funktion $f(x, \cdot)|[a, b]$ eine Regelfunktion ist. Man sagt, das Integral

$$\int_a^\infty f(x,t)\,dt$$

konvergiert gleichmäßig, wenn es für jedes $x \in D$ konvergiert und wenn gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists b_0 \in [a, \infty) \;\; \forall b \geq b_0 \;\; \forall x \in D : \left| \int_b^\infty f(x,t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Die in §23 bewiesenen Sätze über parameterabhängige Integrale lassen sich auf uneigentliche Integrale übertragen, wenn von den auftretenden uneigentlichen Parameterintegralen jeweils gleichmäßige Konvergenz gefordert wird. Wir wollen dies jedoch nur am ersten dieser Sätze als Beispiel illustrieren.

(24.3) **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $f : D \times [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß für jedes $b \in [a, \infty)$ die Einschränkung $f|D \times [a, b]$ gleichmäßig stetig ist. Ferner sei das Integral*

$$\int_a^\infty f(x,t)\,dt$$

gleichmäßig konvergent. Dann ist die durch

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,t)\,dt \qquad \text{für } x \in D$$

definierte Funktion stetig.

Beweis. Sei $x \in D$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integrals existiert ein $b \in [a, \infty)$ mit

$$\left| \int_b^\infty f(y,t)\,dt \right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{für alle } y \in D.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f|D \times [a, b]$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x,t) - f(x',t)| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

für alle $t \in [a,b]$ und alle $x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$.

Für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt also

$$\begin{aligned} & |F(x) - F(x')| \\ = & \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x',t)\,dt + \int_b^\infty f(x,t)\,dt - \int_b^\infty f(x',t)\,dt \right| \\ \leq & \int_a^b |f(x,t) - f(x',t)|\,dt + \left| \int_b^\infty f(x,t)\,dt \right| + \left| \int_b^\infty f(x',t)\,dt \right| \\ \leq & \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Um gegebenenfalls gleichmäßige Konvergenz uneigentlicher Integrale nachweisen zu können, haben wir ein Majorantenkriterium zur Verfügung:

(24.4) **Satz.** *Sei $f : D \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß für jedes $x \in D$ und jedes $b \in [a,\infty)$ die Funktion $f(x,\cdot)|[a,b]$ eine Regelfunktion ist. Es gebe eine Funktion $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ derart, daß jede Einschränkung $g|[a,b]$ Regelfunktion ist, daß*

$$|f(x,t)| \leq g(t) \qquad \text{für alle } x \in D, t \geq a$$

gilt und das Integral

$$\int_a^\infty g(t)\,dt$$

konvergiert. Dann ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x,t)\,dt$$

gleichmäßig konvergent.

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach dem Cauchy-Kriterium (24.1) gibt es ein $u \in [a,\infty)$ mit

$$\int_{u_1}^{u_2} g(t)\,dt < \epsilon \qquad \text{für alle } u_1, u_2 \geq u.$$

Für alle $x \in D$ und alle $u \leq u_1 < u_2$ gilt also

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x,t)\,dt \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} |f(x,t)|\,dt \leq \int_{u_1}^{u_2} g(t)\,dt < \epsilon.$$