für alle $t \in [a,b]$ und alle $x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$.

Für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt also

$$\begin{aligned}
& |F(x) - F(x')| \\
= & \left| \int_a^b f(x,t)\,dt - \int_a^b f(x',t)\,dt + \int_b^\infty f(x,t)\,dt - \int_b^\infty f(x',t)\,dt \right| \\
\leq & \int_a^b |f(x,t) - f(x',t)|\,dt + \left| \int_b^\infty f(x,t)\,dt \right| + \left| \int_b^\infty f(x',t)\,dt \right| \\
\leq & \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Um gegebenenfalls gleichmäßige Konvergenz uneigentlicher Integrale nachweisen zu können, haben wir ein Majorantenkriterium zur Verfügung:

(24.4) **Satz.** *Sei $f : D \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß für jedes $x \in D$ und jedes $b \in [a,\infty)$ die Funktion $f(x,\cdot)|[a,b]$ eine Regelfunktion ist. Es gebe eine Funktion $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ derart, daß jede Einschränkung $g|[a,b]$ Regelfunktion ist, daß*

$$|f(x,t)| \leq g(t) \qquad \text{für alle } x \in D, t \geq a$$

gilt und das Integral

$$\int_a^\infty g(t)\,dt$$

konvergiert. Dann ist das Integral

$$\int_a^\infty f(x,t)\,dt$$

gleichmäßig konvergent.

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach dem Cauchy-Kriterium (24.1) gibt es ein $u \in [a,\infty)$ mit

$$\int_{u_1}^{u_2} g(t)\,dt < \epsilon \qquad \text{für alle } u_1, u_2 \geq u.$$

Für alle $x \in D$ und alle $u \leq u_1 < u_2$ gilt also

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x,t)\,dt \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} |f(x,t)|\,dt \leq \int_{u_1}^{u_2} g(t)\,dt < \epsilon.$$

Nach (24.1) ist daher für jedes $x \in D$ das Integral $\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ konvergent. Lassen wir in der obigen Ungleichung u_2 gegen ∞ gehen, so folgt

$$\left| \int\limits_{u_1}^{\infty} f(x,t)\,dt \right| \leq \epsilon.$$

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also ein $u \in [a,\infty)$, so daß für $u_1 \geq u$ und alle $x \in D$ diese Ungleichung gilt. Also ist $\int_a^\infty f(x,t)\,dt$ gleichmäßig konvergent. ■

Kapitel 8. Funktionenreihen

In diesem Kapitel wollen wir etwas ausführlicher die Möglichkeit studieren, Funktionen durch unendliche Reihen darzustellen. Wir hatten schon im Anschluß an die Taylorformel kurz die Möglichkeit erörtert, bei beliebig oft differenzierbaren Funktionen von den Taylorpolynomen zur Taylorreihe überzugehen. Schon wesentlich früher hatten wir unendliche Reihen benutzt, um gewisse spezielle Funktionen einzuführen, zum Beispiel die Exponentialfunktion durch

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Hierbei ergibt sich unter anderem die Frage, wie man von Eigenschaften der Reihenglieder auf Eigenschaften der Funktion schließen kann. Wir können zum Beispiel zur Berechnung der Ableitung versuchen, „gliedweise“ zu differenzieren. Formal vorgehend, erhält man

$$\exp' x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{dx^k}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x.$$

Das Ergebnis ist richtig; aber führt ein solches Vorgehen in jedem Fall zum richtigen Ergebnis? Diese und ähnliche Fragen werden im folgenden beantwortet. Wir betrachten zunächst allgemein konvergente Folgen von Funktionen und erst dann spezielle Reihen.

25 Konvergenz von Funktionenfolgen

Wir kennen bereits zwei verschiedene Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen, und an diese sei zunächst erinnert.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Funktionen, die sämtlich denselben Definitionsbereich D haben. Für jedes $x \in D$ ist dann $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und für diese ist ein Konvergenzbegriff wohldefiniert. Wenn für jedes $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in D)$$

eine neue Funktion f auf D erklärt, die wir als *Grenzfunktion* der Folge bezeichnen können.

Definition. Seien f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ reelle Funktionen auf D. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* (*punktweise*) gegen f, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{oder} \qquad f_n \to f \;\; (n \to \infty),$$

wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Beispiele.

(1) Sei $D = \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen exp.

(2) Sei $D = [0,1]$ und

$$f_n(x) := x^n.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{für } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

erklärte Funktion f.

Bei diesem Beispiel fällt auf, daß zwar jede Funktion f_n der Folge stetig ist, daß aber die Grenzfunktion unstetig ist. Stetigkeit überträgt sich also bei punktweiser Konvergenz i.a. nicht auf die Grenzfunktion. Um den oft wünschenswerten Schluß von der Stetigkeit der Folgenglieder auf die Stetigkeit der Grenzfunktion zu ermöglichen, braucht man einen Konvergenzbegriff, der schärfer ist als punktweise Konvergenz. Dies ist die bereits in §20 benutzte gleichmäßige Konvergenz, die wir jetzt etwas allgemeiner definieren wollen.

Definition. Seien $f, f_n (n \in \mathbb{N})$ reelle Funktionen auf D, sei $D' \subset D$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig in* D' *gegen* f, wenn gilt

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 \ \forall x \in D' : |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon.$$

Statt „gleichmäßig in D" sagt man kurz „gleichmäßig".

Ist ein fester Definitionsbereich D gegeben, so können wir wie früher für Intervalle die *Supremumsnorm* einer beschränkten Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ erklären durch

$$\|f\| := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Dann gilt also (für Funktionen f, f_n auf D):

$$\begin{aligned} & (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f \\ \Leftrightarrow \ & \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ge n_0 : \|f_n - f\| \le \epsilon \\ \Leftrightarrow \ & \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \end{aligned}$$

Für die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen kennen wir das Kriterium von Cauchy. Ein ganz analoges Kriterium gilt auch für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. Im folgenden liege stets ein fester Definitionsbereich D zugrunde.

Definition. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf D heißt *Cauchy-Folge* genau dann, wenn

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

($\|f_n - f_m\| < \epsilon$ impliziert, daß $\|f_n - f_m\|$ definiert, also $f_n - f_m$ beschränkt ist. Es wird aber nicht vorausgesetzt, daß f_n beschränkt ist.)

(25.1) **Satz.** *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen f. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\| < \epsilon/2$ für $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ gilt also

$$\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \epsilon,$$

wobei die Dreiecksungleichung für die Supremumsnorm benutzt wurde.

„$\Leftarrow$“: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Insbesondere gilt also für jedes $x \in D$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \qquad \text{für } n, m \geq n_0.$$

Die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge und daher nach dem gewöhnlichen Cauchy-Kriterium konvergent gegen eine Zahl, die wir $f(x)$ nennen. Da $x \in D$ beliebig war, ist damit eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ erklärt. Wir behaupten, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ und dazu n_0 wie oben. Für beliebiges $x \in D$ gilt dann

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \qquad \text{für } n, m \geq n_0.$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Da dies für alle $x \in D$ gilt, folgt $\|f_n - f\| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. ■

Der folgende Satz rückt die Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz ins rechte Licht.

(25.2) **Satz.** *Seien f_n, f Funktionen auf D $(n \in \mathbb{N})$, sei $a \in D$. Sind alle f_n stetig in a und konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, so ist f stetig in a.*

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\|f_m - f\| < \epsilon/3$, also

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Da f_m in a stetig ist, existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Sei jetzt $x \in D$ und $|x - a| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Bemerkung. Natürlich kann man nicht umgekehrt schließen, d.h. wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert und alle f_n sowie f stetig sind, braucht keineswegs die Konvergenz gleichmäßig zu sein.

Kann man in Satz (25.2) „stetig“ durch „differenzierbar“ ersetzen? Das ist nicht der Fall.

Beispiel. Sei $D = \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, wie aus

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

folgt. Jede Funktion f_n ist differenzierbar, aber f ist in 0 nicht differenzierbar.

Es kann auch sein, daß zwar die Grenzfunktion f der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ differenzierbar ist, aber die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen f' konvergiert.

Beispiel. Sei $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, alle f_n sowie f sind differenzierbar, aber $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht punktweise gegen f'. Es ist nämlich $f_n'(x) = \cos nx$ und z.B. $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Um wirklich Grenzübergang und Differentiation vertauschen zu können, braucht man stärkere Voraussetzungen, z.B. die folgenden.

(25.3) **Satz.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf $[a,b]$. Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere an wenigstens einer Stelle $x_0 \in [a,b]$.*

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f'.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Nach Voraussetzung und (25.1) existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_m' - f_n'\| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{für alle } m,n \geq n_1.$$

Da $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für } m,n \geq n_2.$$

Sei $x \in [a,b]$. Es ist

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|.$$

Nach dem Mittelwertsatz (17.2) existiert ein $z \in [a,b]$ mit

$$(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0) = (f_m'(z) - f_n'(z))(x - x_0).$$

Für alle $m,n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ folgt

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m'(z) - f_n'(z)||x - x_0| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \|f_m' - f_n'\|(b-a) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Da $x \in [a,b]$ beliebig war, folgt $\|f_m - f_n\| \leq \epsilon$ für $m,n \geq n_0$. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und daher nach (25.1) gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion f.

Wir zeigen jetzt die Differenzierbarkeit von f. Sei $c \in [a,b]$. Setze

$$g_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f_n'(c) & \text{für } x \in [a,b] \setminus \{c\}, \\ 0 & \text{für } x = c. \end{cases}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f_n in c ist g_n in c stetig. Wir zeigen zunächst, daß $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Nach Voraussetzung und (25.1) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_m' - f_n'\| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } m,n \geq n_0.$$

Sei $x \in [a, b]$. Im Fall $x \neq c$ ist

$$g_m(x) - g_n(x) = \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} - (f_m - f_n)'(c).$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $z \in [a, b]$ mit

$$\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} = (f_m - f_n)'(z).$$

Für $m, n \geq n_0$ folgt

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leq |f_m'(z) - f_n'(z)| + |f_m'(c) - f_n'(c)| \\ &\leq 2\|f_m' - f_n'\| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Dies gilt trivialerweise auch für $x = c$. Da $x \in [a, b]$ beliebig war, ist also $\|g_m - g_n\| \leq \epsilon$ für $m, n \geq n_0$. Also ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Nach (25.1) ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion g, die $g(c) = 0$ erfüllt und nach (25.2) in c stetig ist.

Nun gilt für alle $x \in [a, b] \setminus \{c\}$

$$\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - f_n'(c) = g_n(x),$$

woraus durch Grenzübergang

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \lim_{n \to \infty} f_n'(c) = g(x)$$

folgt. Wegen $\lim_{x \to c} g(x) = g(c) = 0$ folgt

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{n \to \infty} f_n'(c).$$

Also ist f in c differenzierbar und $f'(c) = \lim_{n \to \infty} f_n'(c)$. Damit ist die Differenzierbarkeit von f gezeigt, ferner die punktweise Konvergenz von $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f'. Diese Konvergenz ist nach Voraussetzung gleichmäßig. ■

26 Potenzreihen

Nachdem wir früher Reihen reeller Zahlen und jetzt Funktionenfolgen betrachtet haben, ist klar, was allgemein unter einer Funktionenreihe zu verstehen ist. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge auf D. Dann verstehen wir unter

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

die Funktionenfolge $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir bezeichnen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ als Funktionenreihe. Ist die Folge punktweise konvergent, so bezeichnen wir mit $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auch die Grenzfunktion. Die Schreibweise

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f \qquad \text{in } D$$

bedeutet also definitionsgemäß:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in D.$$

Konvergiert die Folge $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D' \subset D$ gleichmäßig (gegen f), so sagen wir, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ in D' gleichmäßig (gegen f) konvergiert.

Die Begriffe der punktweisen oder gleichmäßigen Konvergenz von Reihen sind also nichts Neues gegenüber den Funktionenfolgen. Auch die Sätze aus §25 gelten natürlich sinngemäß für Funktionenreihen. Neu gegenüber der Folgenkonvergenz ist lediglich - wie schon bei Zahlenreihen - der Begriff der absoluten Konvergenz. Definitionsgemäß konvergiert die Reihe $\sum f_k$ absolut, wenn die Reihe $\sum |f_k|$ konvergiert.

In Verallgemeinerung von (8.8) haben wir das folgende wichtige Kriterium für gleichmäßige und absolute Konvergenz.

(26.1) **Satz** (Majorantenkriterium). *Sei $f_k : D \to \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gegeben. Gilt*

$$\|f_k\| \le c_k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut und gleichmäßig.

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\sum c_k$ konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m}^{m+p} c_k < \epsilon$$

für alle $m \ge n_0, p \in \mathbb{N}_0$. Für diese m, p gilt also

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+p} f_k \right\| \le \left\| \sum_{k=m}^{m+p} |f_k| \right\| \le \sum_{k=m}^{m+p} \|f_k\| \le \sum_{k=m}^{m+p} c_k < \epsilon.$$

Die Folge der Partialsummen von $\sum f_k$ und die Folge der Partialsummen von $\sum |f_k|$ sind also Cauchyfolgen und daher nach (25.1) gleichmäßig konvergent. ■

Das Vorstehende und die Ergebnisse aus §25 wollen wir jetzt anwenden auf den besonders wichtigen Spezialfall der Potenzreihen.

Unter einer *Potenzreihe zur Stelle a* versteht man eine Funktionenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \qquad \text{mit } f_k(x) = a_k(x-a)^k \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wo $a \in \mathbb{R}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen ist. Hier ist die folgende ungenaue, aber bequeme Sprechweise üblich. Man sagt

$$\text{„die Potenzreihe } \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k\text{ “}$$

statt

$$\text{„die Potenzreihe } \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ mit } f_k(x) = a_k(x-a)^k \text{ für } x \in \mathbb{R}\text{“.}$$

Wir fragen jetzt nach der Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die eine gegebene Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \tag{$*$}$$

konvergiert. Auf jeden Fall konvergiert sie trivialerweise für $x = a$ (es gibt Potenzreihen, die für kein anderes x konvergieren). Allgemein gibt das Wurzelkriterium (8.10) Auskunft. Nach ihm ist (für gegebenes $x \in \mathbb{R}$) die Reihe $(*)$ absolut konvergent, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = |x-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ist, und sie ist divergent, wenn $|x-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ist.

Zur Vermeidung lästiger Fallunterscheidungen schreiben wir $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (mit beliebigen Symbolen $\infty, -\infty$, die keine reellen Zahlen sind) und definieren

$$-\infty < y < \infty \qquad \text{für } y \in \mathbb{R}.$$

Außerdem definieren wir $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$, ferner $y + \infty = \infty$, $y - \infty = -\infty$ für $y \in \mathbb{R}$. Es sei daran erinnert, daß wir in §8 $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ definiert hatten im Fall, daß die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist.

Für unsere gegebene Potenzreihe setzen wir jetzt

$$r := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dann gilt also: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < r$ ist $(*)$ absolut konvergent, für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > r$ ist $(*)$ divergent. Das Intervall $(a-r, a+r)$ heißt daher *Konvergenzintervall* der Potenzreihe.

Wie steht es mit gleichmäßiger Konvergenz? Sei $(*)$ absolut konvergent für ein x_0. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| \leq |x_0 - a|$ gilt dann

$$|a_k(x-a)^k| \leq |a_k||x_0-a|^k \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0,$$

und die Reihe $\sum^\infty |a_k||x_0-a|^k$ ist konvergent. Nach dem Majorantenkriterium (26.1) folgt, daß die Reihe $(*)$ in $[a-|x_0-a|, a+|x_0-a|]$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Wir fassen zusammen:

(26.2) **Satz und Definition.** *Zu der Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \tag{$*$}$$

gibt es ein $r \in \overline{\mathbb{R}}$, $r \geq 0$, *so daß die Reihe* $(*)$ *für* $|x-a| < r$ *absolut konvergiert und für* $|x-a| > r$ *divergiert. Die Zahl* r *heißt* Konvergenzradius *der Reihe* $(*)$ *und wird gegeben durch*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Das offene Intervall $(a-r, a+r)$ *heißt* Konvergenzintervall *der Reihe* $(*)$*. In jedem kompakten Teilintervall des Konvergenzintervalls konvergiert die Reihe* $(*)$ *gleichmäßig.*

Achtung! Über die Konvergenz in den Endpunkten des Konvergenzintervalls wird hier nichts ausgesagt (und läßt sich auch allgemein nichts sagen). Es gibt Potenzreihen, die in keinem, einem oder beiden Endpunkten des Konvergenzintervalls konvergieren.

Ferner beachte man, daß i.a. nicht im ganzen Konvergenzintervall gleichmäßige Konvergenz vorliegt, sondern nur in kompakten Teilintervallen.

Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} x^k \qquad \text{mit einem } m \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (vgl. (13.11)) ist der Konvergenzradius $= 1$. Ferner gilt:

für $m = 0$ ist (1) divergent in 1 und -1

für $m = 1$ ist (1) konvergent in -1, divergent in 1

für $m = 2$ ist (1) konvergent in -1 und 1.

Nehmen wir an, die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k \tag{$*$}$$

habe den Konvergenzradius $0 < r < \infty$ und konvergiere etwa auch noch im Endpunkt $a+r$ des Konvergenzintervalls. Wir wollen zeigen, daß sie dann im Intervall $[a, a+r]$ gleichmäßig konvergiert. Der Unterschied zur früheren Argumentation ist, daß jetzt nicht notwendig absolute Konvergenz vorliegt, daher ist das Majorantenkriterium nicht anwendbar. O.B.d.A. können wir uns auf den Fall $a = 0$, $r = 1$ beschränken, der durch eine einfache Transformation erreichbar ist.

(26.3) **Satz.** *Ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *gleichmäßig konvergent in* [0,1].

Beweis. Setze $b_k := \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, und es ist $b_{k-1} - b_k = a_k$. Triviale Umformung ergibt für $n > m$

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k x^k = b_m x^{m+1} - b_n x^n + \sum_{k=m+1}^{n-1} b_k(x^{k+1} - x^k).$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_k| < \epsilon/3$ für $k \geq n_0$. Sei jetzt $m \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt für beliebiges $x \in [0,1]$

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k x^k\right| \leq |b_m| + |b_{m+p}| + \sum_{k=m+1}^{m+p-1} |b_k||x^{k+1} - x^k|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \underbrace{\sum_{k=m+1}^{m+p-1} (x^k - x^{k+1})}_{x^{m+1} - x^{m+p} \leq 1} \leq \epsilon.$$

Aus dem Cauchy-Kriterium (25.1) folgt jetzt die behauptete gleichmäßige Konvergenz. ■

Aus (26.3) und (25.2) folgt insbesondere:

(26.4) **Korollar.** *Ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{für } x \in [0,1],$$

so ist f *in* $[0,1]$ *stetig.*

Eine durch eine konvergente Potenzreihe dargestellte Funktion ist also stetig. Allgemein sagen wir, falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \qquad \text{für } x \in (a-r, a+r) \tag{$*$}$$

mit $r > 0$ gilt, die Funktion f sei durch die obige Potenzreihe *dargestellt*, oder sie sei in eine Potenzreihe um a *entwickelt*. Wir untersuchen jetzt die Differenzierbarkeit einer derart dargestellten Funktion. Dazu betrachten wir die durch gliedweise Differentiation von $(*)$ entstehende Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} \tag{$*'$}$$

Wegen $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ hat sie denselben Konvergenzradius wie $(*)$. In jedem kompakten Teilintervall des Konvergenzintervalls $(a-r, a+r)$ ist also $(*')$ nach (26.2) gleichmäßig konvergent; aus (25.3) folgt daher die Differenzierbarkeit von f und die Konvergenz von $(*')$ gegen f'. Auf f' kann man natürlich wieder denselben Schluß anwenden, usw. Auf diese Weise erhalten wir den folgenden Satz:

(26.5) **Satz.** *Sei*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \qquad \text{für } x \in (a-r, a+r)$$

mit positivem Konvergenzradius r. Dann ist f beliebig oft differenzierbar, und für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (x-a)^{k-n},$$

wo die rechts stehende Reihe denselben Konvergenzradius r hat. Speziell ist

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Die letzte Aussage zeigt insbesondere, daß zwei verschiedene Potenzreihen (zur selben Stelle a) nicht dieselbe Funktion darstellen können. Mit anderen Worten: Aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$$

mit Konvergenz in einem Intervall um a folgt $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen).

Taylorreihen

Wir haben eben gezeigt: Wenn die Funktion f durch eine (in einer Umgebung von a konvergente) Potenzreihe um a dargestellt wird, so ist diese gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Hier sei kurz an §18 erinnert: Ist f in einer Umgebung von a beliebig oft differenzierbar, so hatten wir die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

als die *Taylorreihe* von f zur Stelle a bezeichnet. Wenn also f überhaupt durch eine Potenzreihe um a dargestellt werden kann, dann nur durch die Taylorreihe. Im konkreten Fall kommt es also darauf an, den Konvergenzradius der Taylorreihe zu ermitteln. Ist er positiv, so folgt aber allein daraus noch nicht, daß die Taylorreihe gegen die Funktion konvergiert, wie ein Beispiel in §18 zeigte. Um zu zeigen, daß eine gegebene Funktion im Konvergenzintervall wirklich durch ihre Taylorreihe dargestellt wird, muß man also entweder zeigen, daß das Restglied gegen Null konvergiert, oder, falls dies nicht gelingt, auf andere Weise schließen. Hierfür im folgenden einige Beispiele. Für die Abschätzung des Restgliedes haben wir die durch die Taylorformel gegebenen Darstellungen zur Verfügung: Wird

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

gesetzt (und ist f auf einem Intervall definiert), so gilt nach (18.1)

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit einem (von n und x abhängenden) c zwischen a und x, und nach (21.4) gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

In manchen, aber nicht in allen Fällen kann man hiermit die gewünschte Konvergenz der Taylorreihe gegen f zeigen.

Wir wollen als Beispiele die Taylorreihen für einige der im Kapitel über spezielle Funktionen betrachteten Funktionen untersuchen. Für die Funktionen exp, sin, cos wurde (für $a = 0$) bereits früher gezeigt, daß das Restglied gegen Null geht.

Wir betrachten die Logarithmus-Funktion. Als Entwicklungsstelle kommt nur ein Punkt des Definitionsbereiches $\mathbb{R}^+$ in Frage. Wir wählen $a = 1$. Für $f = \ln$ beweist man leicht durch vollständige Induktion

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}, \qquad (k \in \mathbb{N})$$

speziell $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Die Taylorreihe zur Stelle 1 lautet also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist offenbar 1; sie stellt also in (0,2) eine Funktion g dar. Eine Abschätzung des Restgliedes stößt auf Schwierigkeiten: Da man nichts über c_n weiß, kann man nicht ausschließen, daß $c_n = 1/2$ für alle n ist. Wegen

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{c_n^{n+1}}$$

würde dann aber für $0 < x < 1/2$ gelten:

$$\left|\frac{x-1}{c_n}\right| > 1,$$

also $R_{n+1}(x) \not\to 0$. Man kann aber auf andere Weise leicht zeigen, daß g in (0,2) mit der Funktion ln übereinstimmt. Dazu differenzieren wir die Funktion $\ln - g$: Es ist

$$\ln' x - g'(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(x-1)^{k-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)} = 0.$$

Die Funktion $\ln - g$ ist also in (0,2) konstant; da sie an der Stelle $x = 1$ gleich Null ist, ist sie überall Null. Damit ist

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \qquad \text{für } x \in (0,2)$$

gezeigt. Die rechts stehende Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium auch für $x = 2$. Da die dargestellte Funktion nach (26.4) (passend transformiert) in 2 noch stetig ist, stimmt sie dort mit $\ln 2$ überein. Wir können das Ergebnis auch in der Form

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \qquad \text{für } -1 < x \leq 1$$

schreiben.