Wir wollen diese Gleichung für $|x| < 1$ noch auf andere Weise herleiten. Es ist

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k dt.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k$ ist nach dem Majorantenkriterium für $t \in [-|x|, |x|]$ gleichmäßig konvergent; nach Satz (20.4) darf man also gliedweise integrieren und erhält

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k+1} t^{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Speziell haben wir die hübsche Formel

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Zur numerischen Berechnung ist diese Reihe aber ungeeignet; besser konvergiert die Taylorreihe der Funktion

$$\ln \frac{1+x}{1-x}$$

zur Stelle 0. Man bekommt sie aus

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots\right) \\
&= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right) \qquad \text{für } |x| < 1.
\end{aligned}$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir die Funktion $f = \arctan$, die wir in eine Potenzreihe um 0 entwickeln wollen. Zur Berechnung der n-ten Ableitung an der Stelle 0 kann man den Ansatz

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

machen und findet für P_n eine Rekursionsformel, aus der sich herleiten läßt, daß

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

ist. Die Taylorreihe der Funktion arctan lautet also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Der Konvergenzradius ist offenbar 1. Sei f die in $(-1,1)$ dargestellte Funktion. Es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x,$$

ferner $f(0) = 0 = \arctan 0$. Also ist $f(x) = \arctan x$. Wir haben also

$$\begin{aligned}\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \text{in } (-1,1).\end{aligned}$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe auch für $x = 1$ und $x = -1$. Nach (26.4) ist die dargestellte Funktion dort stetig, stimmt also mit der Funktion arctan überein. Speziell haben wir $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, also $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, somit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Auch diese Reihe konvergiert aber zu langsam, um für numerische Rechnungen brauchbar zu sein.

Als letztes Beispiel wollen wir die allgemeine Potenz $x \mapsto x^\alpha$ betrachten. Als Entwicklungsstelle wählen wir ebenfalls 1, aber es schreibt sich bequemer, die Funktion $x \mapsto (1+x)^\alpha$ zu nehmen und um 0 zu entwickeln. Für $f(x) = (1+x)^\alpha$ $(x > -1)$ berechnet man

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

Zur übersichtlicheren Schreibweise wollen wir wie früher den Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ erklären durch

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dann ist die Taylorreihe der Funktion f zur Stelle 0 gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Im Fall $\alpha \in \mathbb{N}_0$ sind fast alle Koeffizienten 0, es liegt also ein Polynom vor. Wir setzen jetzt $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ voraus.

Aus dem Quotientenkriterium (8.9) folgt sofort, daß der Konvergenzradius gleich 1 ist. Die Reihe stellt also in $(-1,1)$ eine Funktion g dar. Setzen wir

$$h(x) := \frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} \qquad \text{für } -1 < x < 1,$$

so gilt

$$h'(x) = \frac{g'(x)(1+x)^\alpha - g(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{g'(x)(1+x) - \alpha g(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}kx^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k+1}(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}kx^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\binom{\alpha}{k+1}(k+1) + \binom{\alpha}{k}k\right\}x^k \\
&= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha g(x),
\end{aligned}$$

also $h' = 0$ und daher $h = \text{const}$. Wegen $h(0) = 1$ folgt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

Man nennt diese Reihe auch die „binomische Reihe“. Das Konvergenzverhalten an den Stellen ± 1 ist etwas schwieriger zu beurteilen:

Bemerkung. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Die binomische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ ist für

	in $x = 1$	in $x = -1$
$\alpha > 0$	konvergent	konvergent
$-1 < \alpha < 0$	konvergent	divergent
$\alpha \leq -1$	divergent	divergent

27 Fourierreihen

Ein wichtiger Typ von Reihenentwicklungen wird gegeben durch die Fourierreihen. Fourier war Physiker, und wir wollen zunächst kurz die physikalische Fragestellung, bei deren Behandlung Fourier (1807) erstmals die heute nach ihm benannten Reihen verwendete, heuristisch erläutern.

Fourier befaßte sich mit Problemen der Wärmeleitung in homogenen Medien. Als besonders einfaches (idealisiertes) Wärmeleitungsproblem betrachten wir einen geraden Stab der Länge l, den wir als „unendlich dünn“ annehmen. Seine Punkte können also durch eine Koordinate x beschrieben werden, die das Intervall $[0,l]$ durchläuft. In diesem Stab herrsche an der Stelle x zur Zeit $t \geq 0$ die Temperatur $T(x,t)$. Wir nehmen an, die beiden Enden des Stabes würden von außen ständig auf der Temperatur Null gehalten, und im übrigen sei der Stab vollkommen isoliert. Zur Zeit $t = 0$ herrsche eine bekannte Temperaturverteilung, gegeben durch eine Funktion $f : [0,l] \to \mathbb{R}$. Von der Temperaturverteilung $T(x,t)$ ist also bekannt, daß

$$T(x,0) = f(x) \qquad \text{für } x \in [0,l]$$

und

$$T(0,t) = T(l,t) = 0 \qquad \text{für } t \geq 0$$

ist. Im Lauf der Zeit werden sich nun auf Grund der Wärmeleitung die Temperaturunterschiede ausgleichen. Die Frage ist, welche Temperaturverteilung zu einer Zeit $t > 0$ herrscht, also wie man die Funktion $T(x,t)$ aus der Anfangsverteilung $T(x,0)$ berechnen kann.

Physikalische Grundannahmen und Überlegungen führen zu der Folgerung, daß die Funktion T (unter, wie üblich, geeigneten Differenzierbarkeitsannahmen) der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

genügen muß, wobei $\mu > 0$ eine Materialkonstante ist. Wir stellen nun zunächst die Frage der Anfangsverteilung zurück und suchen allgemeiner eine Lösung $\varphi : [0,l] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ des Problems

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \varphi(0,t) = \varphi(l,t) = 0. \tag{$*$}$$

Um spezielle Lösungen zu finden, kann man untersuchen, ob es Lösungen der Form

$$\varphi(x,t) = h(t)g(x)$$

gibt („Separationsansatz“, „Trennung der Veränderlichen“). Hierzu muß wegen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = h'(t)g(x), \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = h(t)g''(x)$$

also

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \mu \frac{g''(x)}{g(x)}$$

sein. Da die linke Seite nicht von x und die rechte nicht von t abhängt, handelt es sich um eine Konstante c. Somit werden wir auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} h'(t) &= ch(t), \\ \mu g''(x) &= cg(x) \end{aligned}$$

geführt. Die erste Differentialgleichung läßt sich sofort lösen:

$$h(t) = be^{ct}$$

mit einer Konstanten b. Bei der zweiten ist die Randbedingung

$$g(0) = g(l) = 0$$

zu berücksichtigen. Es liegt daher der Ansatz $g(x) = \sin ax$ nahe. Die Differentialgleichung ist erfüllt, wenn $al = k\pi$ mit ganzzahligem k ist. Für die Konstanten ergibt sich also

$$a = \frac{k\pi}{l}, \qquad c = -\frac{\mu k^2\pi^2}{l^2}.$$

Insgesamt erhalten wir, daß bei beliebigem $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\varphi_k(x,t) = b_k e^{-\frac{\mu k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

mit $b_k = \text{const.}$ eine Lösung des Problems $(*)$ gegeben ist.

Natürlich kann hierdurch i.a. noch nicht die gesuchte Temperaturverteilung $T(x,t)$ gegeben sein, denn es sollte ja $T(x,0)$ eine vorgeschriebene Funktion $f(x)$ sein. Wir erhalten aber

$$\varphi_k(x,0) = b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

also für jedes k eine sehr spezielle Funktion.

Nun beachte man aber, daß unser Problem „linear“ ist. Dies hat zur Folge, daß die Summe von Lösungen auch eine Lösung ist, also ist durch

$$\varphi(x,t) := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} b_k e^{-\frac{\mu k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$(n \in \mathbb{N})$ ebenfalls eine Lösung gegeben. Für diese Lösung ist

$$\varphi(x,0) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

und im allgemeinen wird es immer noch nicht möglich sein, die Zahl n und die Koeffizienten b_k so zu wählen, daß $\varphi(x,0) = f(x)$ ist. Hier setzt nun Fouriers entscheidende (und damals kühne) Überlegung ein. Er geht davon aus, daß man die weitgehend willkürliche Funktion f durch die *unendliche* Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

darstellen kann, wenn man die Koeffizienten b_k geeignet bestimmt. Alsdann setze man

$$T(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\frac{\mu k^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Wenn die obere Reihe für jedes $x \in [0,l]$ absolut konvergiert, dann nach dem Majorantenkriterium auch die untere. Die „Anfangsbedingung“ $T(x,0) = f(x)$ (für $x \in [0,l]$) und die „Randbedingung“ $T(0,t) = T(l,t) = 0$ (für $t \geq 0$) sind dann erfüllt. Falls es erlaubt ist, die Reihe gliedweise zu differenzieren (einmal nach t, zweimal nach x), erhält man, daß T auch der vorgeschriebenen partiellen Differentialgleichung genügt. Das Problem der Temperaturverteilung ist damit als gelöst anzusehen.

Der springende Punkt bei dieser Argumentation ist natürlich die Frage, ob es möglich ist, eine gegebene Funktion $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(l) = 0$ darzustellen als Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Mit einer Variante dieser Fragestellung befassen wir uns im folgenden. Es bedeutet dabei keine Einschränkung der Allgemeinheit, $l = \pi$ anzunehmen. Andererseits soll die Voraussetzung $f(0) = f(l) = 0$ fallengelassen werden, und wir fragen allgemeiner nach der Entwicklungsmöglichkeit in Reihen der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Es ist bequem, Funktionen zu betrachten, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Wenn eine solche Funktion durch die obige Reihe dargestellt wird, ist $f(x+2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir 2π-periodisch.

Wir nehmen nun an, für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiere in der Tat eine Darstellung der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei die Reihe sogar gleichmäßig konvergent sei. Dann lassen sich die Koeffizienten a_k, b_k folgendermaßen berechnen. Multiplikation mit $\cos mx$ und Integration über $[0,2\pi]$ (beachte, daß f wegen der gleichmäßigen Konvergenz stetig ist) ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx \\
= \; & \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} \cos mx\,dx + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos mx\,dx.
\end{aligned}$$

Die rechts stehende Reihe ist ebenfalls gleichmäßig konvergent (nämlich gegen $f(x)\cos mx$; beachte $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$), darf also nach (20.4) gliedweise integriert werden. Es ist also

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos mx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\cos mx\,dx + b_k\int_0^{2\pi}\sin kx\cos mx\,dx\right).$$

Nun findet man leicht durch partielle Integration:

$$\int_0^{2\pi}\cos kx\cos mx\,dx = \int_0^{2\pi}\sin kx\sin mx\,dx = 0 \qquad \text{für } k \neq m$$

$$\int_0^{2\pi}\sin kx\cos mx\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 kx\,dx = \int_0^{2\pi}\sin^2 kx\,dx = \pi \qquad \text{für } k \geq 1.$$

Damit erhält man

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Ganz analog beweist man

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Man bezeichnet nun ganz allgemein für jede 2π-periodische Funktion f und für $k \in \mathbb{N}_0$ die Zahlen

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

($k \in \mathbb{N}_0$) falls diese Integrale existieren, als die *Fourierkoeffizienten* von f und nennt die Funktionenreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

die *Fourierreihe* von f. Dabei ist (analog wie bei Taylorreihen) nichts darüber ausgesagt, ob diese Reihe überhaupt (und für welche x bzw. in welchem Sinne) konvergiert und ob sie im Konvergenzfall gegen $f(x)$ konvergiert. Die Beantwortung dieser Fragen erfordert eingehendere Untersuchungen.

Bevor wir hierauf eingehen, wollen wir aber die hier sehr zweckmäßige komplexe Schreibweise einführen. Es ist ja

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Damit ergibt sich für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} & a_k \cos kx + b_k \sin kx \\ = \; & a_k \cdot \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) - b_k \cdot \frac{i}{2}(e^{ikx} - e^{-ikx}) \\ = \; & \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikx} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikx} \\ = \; & c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \end{aligned}$$

mit

$$c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad c_{-k} := \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

also für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ = \; & c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \\ = \; & \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

Die Folge $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ kürzt man ab mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Dies ist also ebenfalls die Fourierreihe von f, nur in komplexer Schreibweise.

Es ist weiter zweckmäßig, auch komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zuzulassen. Jede solche Funktion läßt sich eindeutig darstellen in der Form $f = u + iv$ mit reellen Funktionen u, v. Man definiert dann (falls u und v, eingeschränkt auf $[a, b]$, Regelfunktionen sind)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx.$$

Mit dieser Konvention ist für $k \geq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \end{aligned}$$

und

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,dx,$$

somit

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir wollen hier auch komplexwertige Funktionen f zulassen, erklären dann die Fourierkoeffizienten c_k von f durch diese Gleichung (falls die Integrale existieren) und nennen die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

die *Fourierreihe* von f.

Die Konvergenztheorie der Fourierreihen wird dann besonders einfach und übersichtlich, wenn man nicht nach der (i.a. selbst bei stetigen reellen Funktionen nicht vorliegenden) punktweisen Konvergenz fragt, sondern nach Konvergenz in einem schwächeren Sinne. Mit dieser auch für Anwendungen wichtigen Konvergenz wollen wir uns hier befassen.

Konvergenz im quadratischen Mittel

Wir betrachten die Menge V der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x+2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und der Eigenschaft, daß Real- und Imaginärteil von f, eingeschränkt auf $[0, 2\pi]$, Regelfunktionen sind. Offenbar ist V (mit den üblichen Verknüpfungen) ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Definition. Für $f, g \in V$ sei

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Die komplexe Zahl $\langle f, g\rangle$ heißt das *Skalarprodukt* von f und g.

(27.1) **Satz.** *Die Abbildung* $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ *hat die folgenden Eigenschaften* (für $f, g, h \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$):

(1) $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$

(2) $\langle f, g + h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$

(3) $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle$

(4) $\langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle$

(5) $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$

(6) $\langle f, f\rangle \geq 0$ (d.h. $\langle f, f\rangle \in \mathbb{R}$ und ≥ 0)

(7) $|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle$

(8) $\sqrt{\langle f + g, f + g\rangle} \leq \sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle}$.

Beweis. (1) – (6) folgen unmittelbar aus der Definition; bei (6) beachte man $f\overline{f} = |f|^2 \geq 0$. Wegen (6) sind die Wurzeln in (8) im Reellen erklärt.

(7) Nach (6) gilt für $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle f + \lambda g, f + \lambda g\rangle \geq 0,$$

also unter Verwendung von (1) – (5)

$$\langle f, f\rangle + \overline{\lambda}\langle f, g\rangle + \lambda\overline{\langle f, g\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle g, g\rangle \geq 0.$$

Ist $\langle g, g\rangle \neq 0$, so kann man

$$\lambda = -\frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle}$$

einsetzen und erhält die behauptete Ungleichung. Ist $\langle g, g\rangle = 0$, so setze man $\lambda = -n\langle f, g\rangle$; es folgt $|\langle f, g\rangle|^2 \leq 1/2n\langle f, f\rangle$, also (da $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist) $|\langle f, g\rangle| \leq 0 = \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle$.

(8) Aus (7) folgt

$$\mathrm{Re}\langle f, g\rangle \leq |\langle f, g\rangle| \leq \sqrt{\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle},$$

also

$$\begin{aligned}\langle f+g, f+g\rangle &= \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \overline{\langle f, g\rangle} + \langle g, g\rangle \\ &= \langle f, f\rangle + \langle g, g\rangle + 2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle \\ &\leq \langle f, f\rangle + \langle g, g\rangle + 2\sqrt{\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle} \\ &= \left(\sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle}\right)^2,\end{aligned}$$

woraus (8) folgt. ■

Definition. Für $f \in V$ ist

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

die L_2-*Norm* oder *Hilbert-Norm* von f.

Die Ungleichungen (7) und (8) aus Satz (27.1) schreiben sich damit in der Form

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2\|g\|_2$$

(*Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*) und

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2;$$

letzteres ist die Dreiecksungleichung für die L_2-Norm.

Wir erinnern uns daran, daß wir schon früher Konvergenz im Sinne einer Norm erklärt hatten, und definieren:

Definition. Seien $f, f_n \in V$ ($n \in \mathbb{N}$). Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent im quadratischen Mittel* (oder konvergent in der L_2-Norm) gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$$

ist.

Die Bezeichnung „im quadratischen Mittel“ ist naheliegend wegen

$$\|f - f_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - f_n(x)|^2\, dx;$$

der rechts stehende Ausdruck läßt sich als Mittelwert der quadratischen Abweichung von f und f_n ansehen. Man beachte, daß eine im quadratischen Mittel konvergierende Funktionenfolge nicht punktweise konvergent zu sein braucht.

Wir betrachten jetzt speziell die durch

$$e_k(x) := e^{ikx}$$

definierten Elemente $e_k \in V$ $(k \in \mathbb{Z})$ und berechnen $\langle e_k, e_m \rangle$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{imx}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-m)x}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \cos(k-m)x\, dx + i \int\limits_0^{2\pi} \sin(k-m)x\, dx \right) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Allgemein nennt man zwei Elemente $f, g \in V$ mit $\langle f, g \rangle = 0$ *orthogonal*, und eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in V heißt *Orthonormalsystem*, wenn

$$\langle b_k, b_m \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m \end{cases}$$

ist.

Im folgenden sei jetzt zunächst ein beliebiges Orthonormalsystem $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ gegeben. Ist $f \in V$, so nennt man die durch

$$c_k := \langle f, b_k \rangle$$

definierten komplexen Zahlen die *Fourierkoeffizienten* von f *bezüglich des gegebenen Orthonormalsystems*. Die früher definierten speziellen Fourierkoeffizienten sind also genau diejenigen bezüglich des speziellen Orthonormalsystems $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k b_k$$

nennt man die *Fourierreihe* von f *bezüglich des Orthonormalsystems* $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Sei jetzt $f \in V$ gegeben, und seien $\alpha_{-n}, \ldots, \alpha_n$ beliebige komplexe Zahlen. Wir wollen

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k b_k \right\|_2^2$$

berechnen und aus dem Ergebnis wichtige Folgerungen ziehen. Es ist (Summation jeweils von $-n$ bis n)

$$\left\|f-\sum\alpha_k b_k\right\|_2^2=\left\langle f-\sum\alpha_k b_k, f-\sum\alpha_j b_j\right\rangle$$
$$=\quad \langle f,f\rangle-\sum\alpha_k\underbrace{\langle b_k,f\rangle}_{\overline{c_k}}-\sum\overline{\alpha_j}\underbrace{\langle f,b_j\rangle}_{c_j}+\left\langle\sum\alpha_k b_k,\sum\alpha_j b_j\right\rangle$$

und

$$\left\langle\sum\alpha_k b_k,\sum\alpha_j b_j\right\rangle=\sum_{k,j}\alpha_k\overline{\alpha_j}\langle b_k,b_j\rangle=\sum_k\alpha_k\overline{\alpha_k}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\sum|c_k-\alpha_k|^2 &= \sum(c_k-\alpha_k)(\overline{c_k}-\overline{\alpha_k})\\ &= \sum c_k\overline{c_k}-\sum\alpha_k\overline{c_k}-\sum\overline{\alpha_k}c_k+\sum\alpha_k\overline{\alpha_k}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\left\|f-\sum\alpha_k b_k\right\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum|c_k|^2+\sum|c_k-\alpha_k|^2.$$

Hieran lesen wir folgendes ab:

(1) $\|f-\sum_{k=-n}^n\alpha_k b_k\|_2^2$ wird genau dann minimal, wenn $\alpha_k=c_k$ für $k=-n,\ldots,n$) ist. Dies ist also eine Kennzeichnung der Fourierkoeffizienten durch eine Extremaleigenschaft: f wird durch eine Linearkombination der Vektoren $b_{-n},\ldots,b_n$ im Sinne der L_2-Norm genau dann am besten approximiert, wenn man als Koeffizienten die Fourierkoeffizienten wählt.

(2) Wählen wir jetzt $\alpha_k=c_k$, so lautet die obige Gleichung

$$\|f\|_2^2-\sum_{k=-n}^n|c_k|^2=\left\|f-\sum_{k=-n}^n c_k b_k\right\|_2^2,$$

und dies ist ≥ 0. Es folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=-\infty}^\infty|c_k|^2$ und die Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^\infty|c_k|^2\leq\|f\|_2^2.$$

Genau dann gilt hier das Gleichheitszeichen, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=-n}^n c_k b_k\right\|_2=0$$

ist. Wir fassen die erhaltenen Ergebnisse zusammen und ergänzen sie durch einige neue Bezeichnungen.

(27.2) **Satz und Definition.** *Sei* $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *ein Orthonormalsystem in* V, *sei* $f \in V$, *und seien* $c_k = \langle f, b_k\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, *die Fourierkoeffizienten von* f *bezüglich des Orthonormalsystems* $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. *Dann gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \|f\|_2^2 \qquad \text{(Besselsche Ungleichung).}$$

Genau dann konvergiert die Fourierreihe von f *im quadratischen Mittel gegen* f, *d.h. es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k b_k \right\|_2 = 0,$$

wenn

$$(*) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2 \qquad \text{(Parsevalsche Vollständigkeitsrelation)}$$

gilt. Das Orthonormalsystem $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *heißt* vollständig, *wenn* $(*)$ *für jedes* $f \in V$ *gilt.*

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen kehren wir zum speziellen Orthonormalsystem $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zurück und zeigen:

(27.3) **Satz.** *Das Orthonormalsystem* $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *ist vollständig.*

Für jede Funktion $f \in V$ konvergiert also die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

im quadratischen Mittel gegen $f(x)$, d.h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0$$

oder, anders geschrieben,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n[f]\|_2 = 0,$$