wenn wir (wie auch im folgenden) mit

$$S_n[f] := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

die n-te Partialsumme der Fourierreihe von f bezeichnen. Nach Satz (27.2) ist dies gleichwertig mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx. \tag{$*$}$$

Zum Beweis von $(*)$ nehmen wir zunächst f von einer sehr speziellen Gestalt an. Sei $0 \le a \le b \le 2\pi$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{für} \quad 0 \le x < a \text{ und } b < x \le 2\pi; \end{cases}$$

im übrigen sei $f(x + 2\pi) = f(x)$. Für die komplexen Fourierkoeffizienten von f erhalten wir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \frac{b-a}{2\pi}$$

und für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-1}{ik} e^{-ikx} \right]_a^b = \frac{i}{2\pi k} (e^{-ikb} - e^{-ika}),$$

also

$$|c_k|^2 = \frac{1 - \cos k(b-a)}{2\pi^2 k^2}.$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(b-a)}{k^2}.$$

Zur Berechnung der letzten Summe folgt eine längere Zwischenrechnung.

1. Beh.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \qquad \text{für } 0 < x < 2\pi.$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} \\
&= e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}-e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{\frac{i}{2}t}-e^{-\frac{i}{2}t}} \\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t},
\end{aligned}
$$

also

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}.$$

Integration von π bis x ergibt

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k} = \int_{\pi}^{x}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt - \frac{x-\pi}{2}.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert das Integral gegen 0, da die Fourierkoeffizienten einer Regelfunktion wegen der Besselschen Ungleichung gegen 0 konvergieren.

2. Beh. Für $\delta \in (0,\pi)$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx/k$ gleichmäßig konvergent in $[\delta, 2\pi-\delta]$.

Beweis. Setze

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n}\sin kx = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right).$$

Für $\delta \le x \le 2\pi-\delta$ gilt

$$
\begin{aligned}
|s_n(x)| &\le \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|e^{\frac{ix}{2}}\right|\left|\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right| \\
&\le \frac{2}{\left|e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right|} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}
$$

Für $m > n > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{\sin kx}{k}\right| &= \left|\sum_{k=n}^{m} \frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n}^{m} s_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{s_m(x)}{m+1} - \frac{s_{n-1}(x)}{n}\right| \\
&\leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n \sin\frac{\delta}{2}}.
\end{aligned}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium (25.1) folgt die gleichmäßige Konvergenz.

3. Beh.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{für } x \in [0, 2\pi].$$

Beweis. Setze $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx/k^2$. Diese Reihe ist nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig konvergent. Für beliebiges $\delta > 0$ ist die Reihe $-\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx/k$ auf $[\delta, 2\pi - \delta]$ nach der 2. Beh. gleichmäßig konvergent. Nach Satz (25.3) und der 1. Beh. folgt

$$F'(x) = \frac{x-\pi}{2}, \qquad \text{also } F(x) = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c.$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} F(x)\, dx = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c,$$

und dies ist andererseits nach Satz (20.4)

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} \cos kx dx = 0.$$

Also ist $c = -\frac{\pi^2}{12}$, womit die 3. Beh. bewiesen ist.

Jetzt können wir unsere oben begonnene Rechnung fortsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \frac{(b-a)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{b-a-\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{12} \\
&= \frac{b-a}{2\pi} = \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ ist für diese spezielle Funktion f also bewiesen.

Nun sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann gibt es endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ der oben betrachteten Art und reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ mit $f = \sum_{j=1}^r \alpha_j f_j$. Allgemein sei mit $S_n[g]$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe von g bezeichnet, also

$$S_n[g](x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k[g] e^{ikx}, \qquad c_k[g] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - S_n[f]\|_2 &= \left\| \sum \alpha_j f_j - \sum \alpha_j S_n[f_j] \right\|_2 \\ &\le \sum |\alpha_j| \|f_j - S_n[f_j]\|_2 \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

nach dem bereits Bewiesenen und (27.2).

Schließlich sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zu $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert eine Treppenfunktion t auf $[0, 2\pi]$ mit $|f(x) - t(x)| \le \epsilon/2$ für $x \in [0, 2\pi]$. Für $g := f - t$ folgt

$$\|g - S_n[g]\|_2^2 = \|g\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k[g]|^2 \le \|g\|_2^2 \le \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2.$$

Nach dem bereits Bewiesenen existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|t - S_n[t]\|_2 < \epsilon/2$ für $n \ge n_0$. Für $n \ge n_0$ gilt also

$$\|f - S_n[f]\|_2 \le \|g - S_n[g]\|_2 + \|t - S_n[t]\|_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n[f]\|_2 = 0.$$

Die Ausdehnung auf $f \in V$ ist jetzt trivial. ∎

Gegenüber der Konvergenz im quadratischen Mittel ist die Beurteilung der punktweisen Konvergenz einer Fourierreihe wesentlich schwieriger. Selbst für stetiges f braucht die Folge $(S_n[f])_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen der Fourierreihe von f nicht punktweise gegen f zu konvergieren. Erstaunlicherweise gilt aber, daß die arithmetischen Mittel dieser Partialsummen sogar gleichmäßig gegen f konvergieren, wie der folgende Satz zeigt.

(27.4) **Satz** (Fejér). *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und stetig und wird*

$$\sigma_n[f] := \frac{1}{n}(S_0[f] + \cdots + S_{n-1}[f])$$

gesetzt, so konvergiert die Folge $(\sigma_n[f])_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* f*.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
S_n[f](x) &= \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt \qquad \text{[Substitution und Periodizität]}
\end{aligned}$$

mit

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Wir bemerken

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,dx = 1$$

und

$$(e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}.$$

Multiplikation mit $e^{-\frac{ix}{2}}$ ergibt

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Setze

$$F_n := \frac{1}{n}(D_0 + \cdots + D_{n-1}),$$

dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(x)\,dx = 1$$

und

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Aus

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x} &= e^{\frac{ix}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} \\ &= \frac{e^{inx}-1}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\cos nx - 1 + i \sin nx}{2i \sin \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1-\cos nx}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

also

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\sigma_n[f](x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} S_k[f](x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_k(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&|f(x)-\sigma_n[f](x)| \\ =& \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt\cdot f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x-t)F_n(t)\,dt\right| \\ \le& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,dt.\end{aligned}$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta < \pi$ und

$$|f(x-t)-f(x)| \le \epsilon \qquad \text{für } |t| < \delta,$$

da f nach (12.5) gleichmäßig stetig ist; ferner ist

$$|f(x-t)-f(x)| \le M \qquad \text{für alle } x \text{ und } t$$

mit passendem M. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,dt \\
=\;& \int_{|t|\le\delta} |f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,dt + \int_{|t|\ge\delta} |f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,dt \\
\le\;& \epsilon + M \int_{|t|\ge\delta} \frac{1}{n}\left[\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt \le \epsilon + \frac{M}{n}\frac{2\pi}{(\sin\frac{\delta}{2})^2}.
\end{aligned}$$

Für $n \ge n_0$ mit passendem n_0 ist der letzte Summand kleiner als ϵ, also ist $|f(x)-\sigma_n[f](x)| < \epsilon$ für $n \ge n_0$. ■

Wir wollen an den Satz von Fejér noch zwei Bemerkungen anfügen.

Zunächst soll noch einmal kurz das Wesen der dort verwendeten Summierung herausgestellt werden. Für eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

bildet man die Mittel der Partialsummen, also

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1} \\
&= \frac{a_0+(a_0+a_1)+(a_0+a_1+a_2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_n)}{n+1} \\
&= a_0 + \frac{n}{n+1}a_1 + \frac{n-1}{n+1}a_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k.
\end{aligned}$$

Gegenüber der Bildung der Partialsumme $\sum_{k=0}^{n} a_k$ werden hierbei also die Summanden a_k mit Gewichten versehen, die von n abhängen und mit k abnehmen.

Sodann wollen wir darauf hinweisen, daß man aus dem Satz von Fejér leicht einen wichtigen Satz über die gleichmäßige Approximierbarkeit stetiger reeller Funktionen durch Polynome herleiten kann.

(27.5) **Satz** (Approximationssatz von Weierstraß). *Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein Polynom P mit*

$$|g(x)-P(x)| \le \epsilon \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Beweis. O.B.d.A. sei $a = -1$ und $b = 1$. Setze

$$f(\varphi) := g(\cos\varphi) \qquad \text{für } -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

und ergänze f zu einer 2π-periodischen Funktion. Wegen $f(-\pi) = f(\pi)$ ist f stetig. Nach dem Satz von Fejér existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(\varphi) - \sigma_n[f](\varphi)| \leq \epsilon \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Die reelle Fourierreihe von f ist von der Form

$$f(\varphi) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi,$$

denn wegen $f(\varphi) = f(-\varphi)$ verschwinden alle b_k. Da $\cos k\varphi$ sich als Polynom in $\cos\varphi$ ausdrücken läßt, ist

$$\sigma_n[f](\varphi) = P(\cos\varphi)$$

mit einem Polynom P. Es ist also

$$|g(\cos\varphi) - P(\cos\varphi)| \leq \epsilon \qquad \text{für alle } \varphi$$

und daher

$$|g(x) - P(x)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

■