Analysis I (WS 2004/2005)

M. Růžička

basierend auf einem Skript von R. Schneider

Sprech- und Schreibweisen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr (W) oder falsch (F). Aus gegebenen Aussagen A,B kann man neue bilden mit den folgenden Verknüpfungen:

$\neg$ A	(nicht A)	Negation
A $\wedge$ B	(A und B)	Konjunktion
A $\vee$ B	(A oder B)	Adjunktion
A $\Rightarrow$ B	(A impliziert B)	Implikation
A $\Leftrightarrow$ B	(A und B sind äquivalent)	Äquivalenz

Die folgende Tafel legt fest, wie diese Verknüpfungen gebraucht werden.

A	B	$\neg$ A	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\Rightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ B
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

Die folgenden Bestandteile von Aussagen werden als Quantoren bezeichnet:

$\forall\, x$	bedeutet:	für alle x
$\exists\, x$	bedeutet:	es gibt ein x

Bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte bedient man sich allgemein der Mengensprechweise. Einige der üblichen Ausdrucksweisen wollen wir jetzt zusammenstellen, weitere folgen jeweils bei Bedarf.

Unter einer Menge versteht man eine Zusammenfassung von mathematischen Objekten; diese Gesamtheit wird dann als neues Objekt angesehen. Diese plausibel klingende Erklärung pflegt man in der Mathematik als „naiv“ zu bezeichnen. Sie bedarf nämlich der Präzisierung. Eine strenge Begründung der Mengenlehre ist aber zum jetzigen Zeitpunkt weder notwendig noch angebracht. Erfahrungsgemäß kann man in der elementaren Analysis mit diesem naiven Gebrauch von Mengen sehr gut arbeiten.

Wir werden also nicht definieren, was eine Menge sein soll, sondern lediglich gewisse Mengen als gegeben ansehen und gewisse Vorschriften, neue Mengen zu bilden, als zulässig betrachten. Mit anderen Worten, wir verwenden die Mengenlehre lediglich als eine bequeme und klare Sprechweise und nicht als das axiomatisch begründbare Fundament der Mathematik, als das sie sich in einem späteren Stadium darstellt.

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

$x \in M$	bedeutet:	x ist Element von M
$x \notin M$	bedeutet:	x ist nicht Element von M

Nach Definition werden zwei Mengen M, N genau dann (dies heißt: dann und nur dann) als gleich angesehen, geschrieben $M = N$, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge*, sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Für konkrete Mengen, die im Verlauf einer mathematischen Darstellung auftreten, sind verschiedenartige Bezeichnungsweisen üblich, zum Beispiel:

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist die Menge, deren Elemente genau die Objekte $a_1, \ldots, a_n$ sind (sie dürfen in beliebiger Reihenfolge hingeschrieben werden).

$\{x|\ A(x)\}$ ist die Menge aller x, für die die Aussage A gilt. Diese Schreibweise ist nur für passend formulierte Aussagen A sinnvoll; besser ist:

$\{x \in M|\ A(x)\}$ ist die Menge aller $x \in M$ (M eine gegebene Menge), für die die Aussage A gilt.

Aus gegebenen Mengen kann man neue bilden nach den folgenden Vorschriften:

$$M_1 \cap M_2 := \{x|\ x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$$

ist der *Durchschnitt* von M_1 und M_2,

$$M_1 \cup M_2 := \{x|\ x \in M_1 \vee x \in M_2\}$$

ist die *Vereinigung* von M_1 und M_2,

$$M_1 \setminus M_2 := \{x|\ x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$$

ist die *(mengentheoretische) Differenz* von M_1 und M_2.

M_1 heißt *Teilmenge* von M_2, geschrieben $M_1 \subset M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist. Offenbar gilt $M_1 = M_2$ genau dann, wenn $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$ ist.

Kapitel 1: Die reellen Zahlen

Grundlage der Analysis sind die reellen Zahlen. Was sind Zahlen? Natürlich kann jeder mit Zahlen umgehen und hat genügend Erfahrung, um von ihrer Nützlichkeit überzeugt zu sein. Die Frage, was eine Zahl „wirklich“ ist, wird man schwerlich vernünftig beantworten können; das ist aber auch nicht notwendig, sondern es genügt zu wissen, wie man mit Zahlen umgeht. Wir wollen hier nicht den Versuch machen, explizit zu sagen, was reelle Zahlen sind, sondern lediglich gewisse Regeln festlegen, nach denen man mit reellen Zahlen rechnen und anderweitig umgehen kann. Wir werden dabei bemüht sein, so wenige Regeln wie möglich an den Anfang zu stellen und aus diesen alle anderen Regeln als Folgerungen herzuleiten. Dieses Vorgehen ist heute typisch für den Aufbau einer mathematischen Theorie: Gewisse Grundbegriffe werden undefiniert an den Anfang gestellt und gewisse Aussagen über diese Grundbegriffe als wahr angenommen. Weitere Begriffe dürfen dann nur durch Rückgriff auf bereits gegebene definiert werden, und weitere Aussagen müssen aus bereits bekannten hergeleitet werden. Die an den Anfang gestellten Aussagen bezeichnet man als *Axiome*. Sie haben in gewissem Sinn den Charakter von „Spielregeln“. In diesem Sinn wollen wir also jetzt ein Axiomensystem für reelle Zahlen angeben und erste Folgerungen daraus herleiten. Wir teilen das Axiomensystem in mehrere Axiomgruppen auf, die wir einzeln betrachten.

1 Die Körperaxiome

Gegeben sei eine nichtleere Menge $\mathbb{R}$. Ihre Elemente werden wir später *reelle Zahlen* nennen. Je zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ sei ein Element $a + b$, genannt ihre *Summe*, und ein Element $a \cdot b$ (meist ab geschrieben), ihr *Produkt*, eindeutig zugeordnet. Dabei sollen folgende Aussagen gelten:

Die Körperaxiome

(1.1) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$
„Assoziativgesetz der Addition“

(Bedeutung der Beklammerung: $a + (b + c) := a + d$ mit $d := b + c$, und analog in anderen Fällen)

(1.2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$
„Kommutativgesetz der Addition“

(1.3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \;\; \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
„Existenz eines neutralen Elements der Addition“

(1.4) $\forall a \in \mathbb{R} \;\; \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
„Existenz eines inversen Elements der Addition“

....

(1.5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(bc) = (ab)c$

(1.6) $\forall a, b \in \mathbb{R} : ab = ba$

(1.7) $\exists 1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\; \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$

(1.8) $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\; \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : aa^{-1} = 1$

....

(1.9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac$
„Distributivgesetz“

Bemerkung. Wegen der Assoziativgesetze dürfen wir schreiben:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c =: a + b + c, \\ a(bc) &= (ab)c =: abc. \end{aligned}$$

Folgerungen aus den Axiomen

(1.10) **Behauptung.** Die Zahl 0 ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $0' \in \mathbb{R}$ ein weiteres Element mit $a + 0' = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Speziell gilt dann $0 + 0' = 0$. Nach (1.3) gilt $0' + 0 = 0'$. Nach (1.2) ist $0 + 0' = 0' + 0$. Also ist $0 = 0'$. /.

(1.11) **Beh.:** Zu $a \in \mathbb{R}$ ist $-a$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $a' \in \mathbb{R}$ ein Element mit $a + a' = 0$. Addition von $-a$ ergibt $-a + (a + a') = -a$. Aus (1.1) folgt $(-a + a) + a' = -a$. Wegen $-a + a \overset{(1.2)}{=} a + (-a) \overset{(1.4)}{=} 0$ und $0 + a' \overset{(1.2)}{=} a' + 0 \overset{(1.3)}{=} a'$ folgt $a' = -a$. /.

(1.12) **Beh.:** $-0 = 0$.

Beweis. $0 \overset{(1.4)}{=} 0 + (-0) \overset{(1.2)}{=} -0 + 0 \overset{(1.3)}{=} -0$. /.

Bezeichnung. Statt $a + (-b)$ schreibt man $a - b$, genannt *Differenz* von a und b.

(1.13) **Beh.:** Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $a + x = b$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen $a + (b - a) \overset{(1.2)}{=} a + (-a + b) \overset{(1.1)}{=} (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b$ ist $x = b - a$ eine Lösung. Sei $y \in \mathbb{R}$ ein Element mit $a + y = b$. Dann ist $b - a = -a + b = -a + (a + y) = (-a + a) + y = 0 + y = y$. /.

(1.14) **Beh.:** Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-(-a) = a$.

Beweis. Nach Def. ist $-(-a)$ das Inverse von $-a$, d.h. es gilt $(-a)+(-(-a)) = 0$. Andererseits ist $(-a) + a = a + (-a) = 0$. Aus (1.11) folgt $-(-a) = a$. /.

(1.15) **Beh.:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $-(a + b) = -a - b$.

Beweis. Es gilt $(a + b) - (a + b) = 0$ und $(a + b) + (-a - b) = a + (b - a - b) = a + (-a + b - b) = a + (-a) + 0 = 0$. Aus (1.11) folgt die Behauptung. /.

Völlig analog wie die vorstehenden Behauptungen beweist man die folgenden Aussagen über die Multiplikation anstelle der Addition:

(1.16) **Beh.:** Die Zahl 1 ist eindeutig bestimmt.

(1.17) **Beh.:** Zu $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist a^{-1} eindeutig bestimmt.

(1.18) **Beh.:** Sei $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{R}$. Die Gleichung $ax = b$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung x. Die Lösung ist $a^{-1}b =: \dfrac{b}{a} =: b/a$.

(1.19) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (a^{-1})^{-1} = a$.

(1.20) **Beh.:** $\forall a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Erst die nachstehenden Folgerungen benutzen auch das Distributivgesetz.

(1.21) **Beh.:** Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt $(a + b)c = ac + bc$.

Beweis. $(a + b)c \overset{(1.6)}{=} c(a + b) \overset{(1.9)}{=} ca + cb \overset{(1.6)}{=} ac + bc$ /.

(1.22) **Beh.:** Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $a \cdot 0 = 0$.

Beweis. $a \cdot 0 + a \cdot 0 \overset{(1.9)}{=} a(0 + 0) = a \cdot 0$. Da auch $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$ ist, folgt $a \cdot 0 = 0$ aus (1.13). /.

(1.23) **Beh.:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist.

Beweis. (1) Sei $ab = 0$ und etwa $a \neq 0$. Dann folgt $0 = a^{-1}(ab) \overset{(1.5)}{=} (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$, also $b = 0$.

(2) Sei $a = 0$ oder $b = 0$, etwa $b = 0$. Dann ist $ab = a \cdot 0 = 0$ nach (1.22). /.

(1.24) **Beh.:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(-a)b = -(ab)$.

Beweis. Es ist $ab + (-a)b \overset{(1.21)}{=} (a + (-a))b = 0 \cdot b \overset{(1.22)}{=} 0$ und $ab + (-(ab)) = 0$. Aus der Eindeutigkeit des Inversen folgt die Behauptung. /.

Speziell ist also $(-1)b = -b$ für alle $b \in \mathbb{R}$.

(1.25) **Beh.:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(-a)(-b) = ab$.

Beweis. $(-a)(-b) \overset{(1.24)}{=} -(a(-b)) \overset{(1.24)}{=} -(-(ab)) \overset{(1.14)}{=} ab$. /.

ANMERKUNG: Ein Tripel $(M, +, \cdot)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge M und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf M, für die die Axiome (1.1)–(1.9) (mit M anstelle von $\mathbb{R}$) gelten, wird als *(kommutativer) Körper* bezeichnet.

Wie man leicht nachweist, gibt es einen Körper $(M, +, \cdot)$ mit $M = \{0, 1\}$ und der Eigenschaft $1+1 = 0$. Aus den Körperaxiomen läßt sich also noch nicht herleiten, daß $1 + 1 \neq 0$ ist.

2 Die Anordnungsaxiome

Zusätzlich nehmen wir nun an, daß auf der Menge $\mathbb{R}$ eine Beziehung $<$ (gelesen „kleiner als") gegeben ist, die zwischen zwei Zahlen bestehen kann. Für je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist also $a < b$ eine Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Wir fordern die folgenden Regeln, die sogenannten „Anordnungsaxiome".

(2.1) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \neq b \Leftrightarrow (a < b \vee b < a)$
„Vergleichbarkeit"

(2.2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$
„Transitivität"

(2.3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow a + c < b + c$
„Monotoniegesetz der Addition"