18 Höhere Ableitungen und Taylorformel

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Falls f in einer Umgebung von a (geschnitten mit D) differenzierbar und f' in a differenzierbar ist, heißt f *zweimal differenzierbar in a*, und

$$(f')'(a) =: f''(a) =: f^{(2)}(a) =: \frac{d^2 f(x)}{dx^2}(a)$$

heißt *zweite Ableitung von f in a.*

Rekursive Definition: Falls f in einer Umgebung von a (geschnitten mit D) k-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ in a differenzierbar ist, heißt f *$(k+1)$-mal differenzierbar in a*, und

$$f^{(k)\prime}(a) =: f^{(k+1)}(a) =: \frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}}(a)$$

heißt *$(k+1)$-te Ableitung von f in a.* Setze noch $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$.

f heißt *k-mal differenzierbar*, wenn f k-mal differenzierbar in a für alle $a \in D$ ist.

f heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn f k-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig ist.

Beispiele. Die bisher betrachteten speziellen Funktionen, also rationale Funktionen, exp, ln, sin, cos, tan, arcsin etc. und alle Funktionen, die aus solchen durch rationale Rechenoperationen und Komposition zusammengesetzt sind, führen bei Differentiation auf Funktionen vom selben Typ; sie sind daher beliebig oft differenzierbar (im jeweiligen Definitionsbereich).

Wir bringen noch ein weniger triviales Beispiel, das verschiedentlich von Nutzen ist. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Beh.: f ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis. An jeder Stelle $x \neq 0$ ist f beliebig oft differenzierbar (trivial für $x < 0$, klar nach vorstehender Bemerkung für $x > 0$). Für $x > 0$ gilt

$$(*) \qquad f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{p_k(x)}{x^{2k}}$$

mit einer gewissen Polynomfunktion p_k. Dies beweisen wir durch Induktion. Zunächst ist

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Für eine Zahl $k \geq 1$ sei die Darstellung $(*)$ bereits gezeigt. Dann ist

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\frac{p_k(x)}{x^{2k}} + \frac{p_k'(x)x^{2k} - p_k(x)2kx^{2k-1}}{x^{4k}}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\frac{p_k(x) + p_k'(x)x^2 - 2kp_k(x)x}{x^{2(k+1)}}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Nun zeigen wir durch Induktion, daß f in 0 k-mal differenzierbar ist. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \to 0$$

für $x \searrow 0$ nach (13.7), also $f_r'(0) = 0$. Da auch $f_\ell'(0) = 0$ ist, ist $f'(0) = 0$.

Sei bereits bewiesen, daß f in 0 k-mal differenzierbar ist. Dann existiert also die k-te Ableitung $f^{(k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \frac{p_k(x)}{x^{2k+1}}e^{-\frac{1}{x}} \to 0$$

für $x \searrow 0$ nach (13.7) , also $f_r^{(k)'}(0) = 0$. Da auch $f_\ell^{(k)'}(0) = 0$ ist, ist $f^{(k)'}(0) = 0$.

Differenzierbarkeit einer Funktion bedeutet, grob gesagt, daß sich die Funktion durch eine affine Funktion, also eine Polynomfunktion vom Grad 1, gut approximieren läßt. Analog kann man k-malige Differenzierbarkeit so interpretieren, daß die Funktion durch eine Polynomfunktion vom Grad k gut approximiert werden kann, und zwar „von k-ter Ordnung“. Zunächst zeigen wir unter einer schärferen Voraussetzung eine genauere Aussage.

(18.1) **Satz** (Taylorscher Satz). *Sei $a < b$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und f auf (a,b) $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit*

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(b-a)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Beweis. Setze

$$g(x) := f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \alpha\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

für $a \leq x \leq b$. Dann ist $g(b) = 0$, und α sei so gewählt, daß auch $g(a) = 0$ ist. Dann kann man auf g den Satz von Rolle (17.1) anwenden. Es folgt die Existenz eines $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 - f'(x) - [f''(x)(b-x) - f'(x)] - \ldots \\ &- \left[\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right] + \alpha\frac{(b-x)^n}{n!} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \alpha\frac{(b-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = c$ ergibt $f^{(n+1)}(c) = \alpha$. Setzt man jetzt $x = a$ in der Definitionsgleichung für g, so folgt die Behauptung. ■

Bemerkung. Für $n = 0$ reduziert sich der Taylorsche Satz (18.1) gerade auf den Mittelwertsatz (17.2).

Analog wie (18.1) kann man den Fall $b < a$ behandeln; aus beiden Fällen ergibt sich Satz (18.2).

(18.2) **Satz.** *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, sei $a \in D$. Dann gilt für beliebige $x \in D$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a + \vartheta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(„Taylorformel“) *mit einem (von a und x abhängenden) $\vartheta \in (0, 1)$.*

Die Funktion

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nennt man auch das *Taylorpolynom n-ter Ordnung von f zur Stelle a.*

Ist $f^{(n+1)}$ in D beschränkt, so folgt aus Satz (18.2) unter den dortigen Voraussetzungen insbesondere

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = 0.$$

Diese Aussage läßt sich auch schon unter schwächeren Voraussetzungen beweisen:

(18.3) **Satz.** *Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion f sei in einer Umgebung von a $(n-1)$-mal differenzierbar und in a n-mal differenzierbar. Dann gilt*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = 0.$$

Beweis. Im Fall $n = 1$ lautet die Behauptung

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \right| = 0;$$

dies ist wegen der Differenzierbarkeit von f in a erfüllt.

Sei jetzt $n \geq 2$. Es gibt nach Voraussetzung ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so daß f in $[a-\delta, a+\delta]$ $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Setze

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \text{für } x \in [a-\delta, a+\delta].$$

Sei $x \in [a-\delta, a+\delta]$. Nach dem Taylorschen Satz (für $n-2$ statt n) existiert ein (i.a. von x abhängendes) c mit $|c-a| \leq |x-a|$, so daß

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{g^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

ist. Nun ist $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-2)}(a) = 0$ und

$$g^{(n-1)}(c) = f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(c-a),$$

also

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{(n-1)!} \left| f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(c-a) \right| |x-a|^{n-1} \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \left| \frac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{c-a} - f^{(n)}(a) \right| |x-a|^n. \end{aligned}$$

Da $f^{(n-1)}$ nach Voraussetzung in a differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{c \to a} \left| \frac{f^{(n-1)}(c) - f^{(n-1)}(a)}{c-a} - f^{(n)}(a) \right| = 0.$$

Wegen $|c-a| \leq |x-a|$ folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{|g(x)|}{|x-a|^n} = 0,$$

wie behauptet. ■

Taylorreihen

Ist die Funktion f in einer Umgebung von a beliebig oft differenzierbar, so gilt für sie die Taylorformel für jede natürliche Zahl n. Dies legt es nahe, neben den Taylorpolynomen

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

auch die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

zu betrachten.

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, sei $a \in D$. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylorreihe* von f an der Stelle x zur Entwicklungsstelle a.

Achtung! Die Taylorreihe einer Funktion f an der Stelle x braucht nicht zu konvergieren, und wenn sie konvergiert, braucht sie nicht gegen $f(x)$ zu konvergieren. Zum Beispiel sei

$$f(x) := \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } x \neq 1.$$

Man berechnet

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \qquad \text{also } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1.$$

Die Taylorreihe von f zur Entwicklungsstelle $a = 0$ ist also gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Diese Reihe konvergiert, wie wir wissen, für $|x| < 1$, und zwar gegen $f(x)$. Aber für $|x| \geq 1$ ist die Reihe divergent. – Es gibt sogar beliebig oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihe zur Entwicklungsstelle a für jedes $x \neq a$ divergiert.

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Wie früher gezeigt, ist f beliebig oft differenzierbar und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Die Taylorreihe dieser Funktion konvergiert also trivialerweise, aber für $x > 0$ nicht gegen $f(x)$.

Man muß also in jedem Einzelfall untersuchen, für welche x die Taylorreihe einer gegebenen Funktion f an der Stelle x wirklich gegen $f(x)$ konvergiert. Definieren wir das $(n+1)$-te Restglied R_{n+1} durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

so ist die Konvergenz der Taylorreihe gegen $f(x)$ also gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

Hier ist nun die Taylorformel von Nutzen, die uns eine Darstellung dieses Restgliedes angibt, nämlich

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit einer Zahl c zwischen a und x. In manchen, aber nicht in allen Fällen kann man hiermit die gewünschte Konvergenz der Taylorreihe gegen f zeigen.

Als Beispiel betrachten wir die Exponentialfunktion und eine beliebige Entwicklungsstelle a. Das Restglied lautet

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Die Zahl c_n hängt zwar von n ab, aber es ist

$$e^{c_n} \leq \max\{e^a, e^x\},$$

also gilt $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Daher ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!}(x-a)^k = e^a e^{x-a},$$

womit sich wieder die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergeben hat.

Die genauere Behandlung von Taylorreihen erfolgt erst in §27, da es nützlich ist, hierzu die Integralrechnung zur Verfügung zu haben.

Wir beschließen dieses Kapitel mit zwei Anwendungen von Ableitungen zweiter und höherer Ordnung.

Extremwerte differenzierbarer Funktionen

Die Taylorformel liefert Informationen über das Verhalten hinreichend oft differenzierbarer Funktionen in der Umgebung eines Punktes. Als Anwendung ergeben sich zum Beispiel Aussagen über Extremwerte.

Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat im Punkt $a \in D$ ein *lokales Maximum (striktes lokales Maximum)*, wenn es eine Umgebung U von a gibt mit $f(a) \geq f(x)$ (bzw. $f(a) > f(x)$) für alle $x \in (U \cap D) \setminus \{a\}$.

Analog: Minimum, Oberbegriff: Extremum

Der Punkt $a \in D$ heißt *innerer Punkt* von D, wenn D Umgebung von a ist, also wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset D$.

(18.4) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und a innerer Punkt von D.*
(a) *Ist f in a differenzierbar und hat f in a ein lokales Extremum, so ist $f'(a) = 0$.*
(b) *Sei f n-mal stetig differenzierbar und*

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ist n ungerade, so hat f in a kein lokales Extremum. Sei n gerade. Im Fall $f^{(n)}(a) > 0$ hat f in a ein striktes lokales Minimum, im Fall $f^{(n)}(a) < 0$ ein striktes lokales Maximum.

Beweis. Die Behauptung (a) wurde bereits im Beweis von Satz (17.1) gezeigt.
(b) Da a innerer Punkt von D ist, folgt aus der Taylorformel und den Voraussetzungen

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - a)^n$$

mit $|c - a| \leq |x - a|$ für alle x aus einer Umgebung von a. Da $f^{(n)}$ stetig und $f^{(n)}(a) \neq 0$ ist, existiert eine Umgebung U von a mit $f^{(n)}(c)f^{(n)}(a) > 0$ für alle $c \in U$. Jetzt liest man die Behauptung ab. ■

Konvexe Funktionen

Wechselt die erste Ableitung einer Funktion auf einem Intervall nicht das Vorzeichen, so ist die Funktion dort monoton. Die Bedingung, daß die zweite Ableitung nicht das Vorzeichen ändern soll, führt auf die wichtige Klasse der konvexen bzw. konkaven Funktionen.

Definition. Sei D ein Intervall. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in D$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt. f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

(18.5) **Satz.** *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f konvex genau dann, wenn f' monoton wachsend ist.*

Beweis. Die Konvexitätsbedingung ist äquivalent mit: Für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und alle $x \in (x_1, x_2)$ gilt

$$(*) \qquad f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Seien x_1, x_2 wie oben. Ist f konvex, so folgt aus $(*)$ durch Umrechnung

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

und daraus durch Grenzübergang $x \searrow x_1$ bzw. $x \nearrow x_2$ die Ungleichung $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Umgekehrt folgt aus dem Mittelwertsatz (17.2) die Existenz von Zahlen $c_1 \in (x_1, x)$ und $c_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2).$$

Ist nun f' monoton wachsend, so ist $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, woraus die Ungleichung $(*)$ sich durch Umrechnung ergibt. ∎

Als Folgerung ergibt sich wegen Satz (17.5):

(18.6) **Satz.** *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in D$.*

Als Anwendung beweisen wir eine nützliche Ungleichung. Dazu betrachten wir zunächst die Funktion $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$ und berechnen $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, also ist ln konkav. Für beliebige $x, y > 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt daher

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y,$$

folglich

$$\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq e^{\frac{1}{p}\ln x} e^{\frac{1}{p}\ln y} = x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}},$$

also

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Dies gilt trivialerweise auch für $x = 0$ oder $y = 0$.

Hieraus können wir herleiten:

(18.7) **Satz.** *Für $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und beliebige $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(Höldersche Ungleichung).

Beweis. O.B.d.A. sei die rechte Seite $\neq 0$. Setze

$$a_i := \frac{|x_i|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}, \quad b_i = \frac{|y_i|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}.$$

Aus der obigen Ungleichung folgt

$$\frac{|x_i y_i|}{\left(\sum |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} = a_i^{\frac{1}{p}} b_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a_i}{p} + \frac{b_i}{q},$$

also

$$\frac{\sum_i |x_i y_i|}{\left(\sum |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum a_i}{p} + \frac{\sum b_i}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

■