(2.4) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a < b \wedge 0 < c) \Rightarrow ac < bc$
„Monotoniegesetz der Multiplikation“

Bezeichnungen

$$a > b \quad :\Leftrightarrow \quad b < a \qquad (> \text{ wird gelesen: „größer als“})$$

$$a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \text{ oder } a = b$$

$$a \geq b \quad :\Leftrightarrow \quad a > b \text{ oder } a = b$$

Statt $a < b$ und $b < c$ schreibt man kurz $a < b < c$. Hierfür sagt man auch, „b liegt zwischen a und c“.

Definition. $a \in \mathbb{R}$ heißt *positiv* (*negativ*), wenn $a > 0$ (bzw. $a < 0$) ist.

Wir leiten nun aus den Anordnungsaxiomen (und den Körperaxiomen) einige Folgerungen her.

(2.5) **Beh.:** $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow -b < -a$.

Beweis. Gelte $a < b$. Aus (2.3) (mit $c = -a - b$) folgt $a - a - b < b - a - b$, also $-b < -a$. /.

(2.6) **Beh.:** $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R} : (a < b \wedge a' < b') \Rightarrow a + a' < b + b'$.

Beweis. Aus $a < b$ und $a' < b'$ folgt nach (2.3) $a+a' < b+a' = a'+b < b'+b = b+b'$, nach (2.2) ist also $a + a' < b + b'$. /.

(2.7) **Beh.:** $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R} : (0 \leq a < b \wedge 0 \leq a' < b') \Rightarrow aa' < bb'$.

Beweis. Ist $a' = 0$, so ist $aa' = 0$ und $0 < bb'$ nach (2.4), also $aa' < bb'$. Sei jetzt $0 < a'$. Nach (2.4) ist $aa' < ba' < bb'$, nach (2.2) also $aa' < bb'$. /.

(2.8) **Beh.:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$.

Beweis. Aus $c < 0$ folgt nach (2.5) $0 < -c$ und damit nach (2.4) $a(-c) < b(-c)$, also $-(ac) < -(bc)$ und somit nach (2.5) $ac > bc$. /.

(2.9) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : aa > 0$.

Beweis. Ist $a > 0$, so folgt die Behauptung aus (2.4). Andernfalls ist nach (2.1) $a < 0$, also $-a > 0$ und daher nach (1.25) und (2.4) $aa = (-a)(-a) > 0$. /.

Insbesondere gilt $1 > 0$ wegen $1 \neq 0$ und $1 = 1 \cdot 1$. Aus $1 > 0$ und (2.6) folgt $1+1 > 0+0 = 0$; wegen $1+1 > 0$ ist $1+1 \neq 0$, was allein aus den Körperaxiomen nicht gefolgert werden konnte.

(2.10) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R} : a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.

Beweis. Sei $a > 0$. Es gilt $a^{-1} = (aa^{-1})a^{-1} = a(a^{-1}a^{-1}) > 0$ nach (2.9) und (2.4) (denn wegen $aa^{-1} = 1$ und (1.23) ist $a^{-1} \neq 0$). /.

Analog ergibt sich: $\forall a \in \mathbb{R} : a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$.

(2.11) **Beh.:** $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$.

Beweis. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $ab > 0$ und daraus $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1} > 0$ nach (2.10). Hieraus und aus $a < b$ folgt nach (2.4) $aa^{-1}b^{-1} < ba^{-1}b^{-1}$, also $b^{-1} < a^{-1}$. /.

Bezeichnungen

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ wird definiert:

$$\begin{array}{rcll} [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall} \\ (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \text{offenes Intervall} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall} \end{array}$$

In jedem Fall heißt $b - a$ auch die *Länge* des Intervalls. Ferner wird definiert:

$$\begin{array}{rcl} [a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\ (a,\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \\ (-\infty,a] & := & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\ (-\infty,a) & := & \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}. \end{array}$$

Das Symbol ∞ ist dabei nur zur Vereinfachung der Schreibweise gewählt; es ist *kein* Element von $\mathbb{R}$. Alle vorstehend definierten Mengen, dazu $\emptyset$ und $\mathbb{R}$, heißen *Intervalle*.

Definition. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

Die Zahl $|a|$ heißt der *Absolutbetrag* oder kurz der *Betrag* der Zahl a.

Eigenschaften des Absolutbetrages

Unmittelbar aus der Definition folgt:

$$\begin{aligned} |a| &\geq 0 \\ |a| &= 0 \Leftrightarrow a = 0 \\ -|a| &\leq a \leq |a| \end{aligned}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

(2.12) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R} : |-a| = |a|$

Beweis. Fallunterscheidung:

1.Fall: $a \geq 0$. Dann ist $|a| = a$ und $|-a| = -(-a) = a$.

2.Fall: $a < 0$. Dann ist $|a| = -a$ und $|-a| = -a$. /.

(2.13) **Beh.:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|ab| = |a||b|$.

Beweis. Fallunterscheidung:

1.Fall: $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Dann ist $ab \geq 0$, also $|ab| = ab$, und es ist $|a| = a$, $|b| = b$, also $ab = |a||b|$.

2.Fall: $a \geq 0$ und $b < 0$. Dann ist $ab \leq 0$, also $|ab| = -ab$, und es ist $|a| = a$, $|b| = -b$, also $-ab = |a||b|$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{3.Fall: } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ \text{4.Fall: } a < 0 \text{ und } b < 0 \end{array}\right\} \text{analog. /.}$$

(2.14) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |a^{-1}| = |a|^{-1}$.

Beweis. $1 = |1| = |a \cdot a^{-1}| = |a| \cdot |a^{-1}| \Rightarrow$ Beh. /.

(2.15) **Beh.:** (*Dreiecksungleichung*): $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$.

Beweis. Wegen $a \leq |a|$ und $b \leq |b|$ ist nach (2.6) $a+b \leq |a|+|b|$. Wegen $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b|$ ist ebenso $-(a+b) \leq |a|+|b|$. Nach Definition des Absolutbetrages folgt $|a+b| \leq |a|+|b|$. /.

(2.16) **Beh.:** $\forall a, b \in \mathbb{R} : \Big| |a| - |b| \Big| \leq |a+b|$.

Beweis. Es ist $|a| = |(a+b)-b| \leq |a+b|+|b|$, also $|a|-|b| \leq |a+b|$. Vertauschung von a und b ergibt $-(|a|-|b|) = |b|-|a| \leq |a+b|$, insgesamt folgt die Behauptung. /.

Anmerkung. Ein Quadrupel $(M, +, \cdot, <)$, wobei M eine nichtleere Menge ist, $+$ und $\cdot$ zwei Verknüpfungen und $<$ eine Beziehung auf M sind derart, daß die Axiome (1.1)–(1.9) und (2.1)–(2.4) (mit M statt $\mathbb{R}$) erfüllt sind, heißt *angeordneter Körper*.

Wir bemerken ohne Beweis, daß bis jetzt zum Beispiel die folgenden Aussagen noch nicht beweisbar sind:

(a) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$ (nach Definition ist $x^2 := x \cdot x$ und $2 := 1+1$).

(b) Für gegebenes $a \in \mathbb{R}$ ist schließlich $1+1+\ldots+1 > a$, wenn genügend oft 1 addiert wird.

3 Das Vollständigkeitsaxiom

Wie die Anmerkung am Ende des vorigen Paragraphen zeigt, reichen die Körper- und Anordnungsaxiome noch nicht aus, um alle Eigenschaften zu erfassen, die wir von den reellen Zahlen erwarten. Zur Formulierung des letzten Axioms dient die folgende Definition:

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke für M*, wenn

$$x \leq s \qquad \text{für alle } x \in M$$

gilt. M heißt *nach oben beschränkt*, wenn es in $\mathbb{R}$ eine obere Schranke für M gibt.

Eine Zahl $s_0 \in \mathbb{R}$ heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* der Menge M, wenn s_0 obere Schranke für M ist und jede Zahl $s < s_0$ nicht obere Schranke für M ist.

Enthält die Menge M ein größtes Element m_0 (also ein $m_0 \in M$ mit $x \leq m_0$ für alle $x \in M$), so heißt m_0 *Maximum* der Menge M.

Ein Maximum einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist also stets auch Supremum von M, aber i.a. nicht umgekehrt, denn ein Supremum von M braucht nicht Element von M zu sein.

Völlig analog definiert man die Begriffe untere Schranke, nach unten beschränkt, größte untere Schranke (Infimum), Minimum.

Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele. Für die Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$ ist jede Zahl s mit $s \geq b$ eine obere Schranke, und b ist kleinste obere Schranke. Für $[a, b]$ ist b das Maximum und a das Minimum, aber $[a, b)$ besitzt kein Maximum.

Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \sup M &:= \text{Supremum von } M \\ \inf M &:= \text{Infimum von } M \\ \max M &:= \text{Maximum von } M \\ \min M &:= \text{Minimum von } M \end{aligned}$$

Nun formulieren wir das

(3.1) Vollständigkeitsaxiom: Zu jeder nichtleeren, nach oben beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gibt es in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke.

Als unmittelbare Folgerung haben wir:

(3.2) **Beh.:** Zu jeder nichtleeren, nach unten beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gibt es in $\mathbb{R}$ eine größte untere Schranke.

Beweis. Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Setze $-M := \{x \in \mathbb{R} | -x \in M\}$. Für $s \in \mathbb{R}$ zeigt man leicht:

$$\begin{aligned} s \text{ untere Schranke für } M &\Leftrightarrow -s \text{ obere Schranke für } -M \\ s \text{ größte untere Schranke für } M &\Leftrightarrow -s \text{ kleinste obere Schranke für } -M. \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt durch Anwendung des Vollständigkeitsaxioms auf $-M$. /.

Weitere Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom ziehen wir an dieser Stelle nicht. Der gesamte nachfolgende Aufbau der Analysis stützt sich auf das

Vollständigkeitsaxiom, so daß praktisch jeder wichtige Satz der Analysis ein Beispiel für eine Folgerung aus diesem Axiom liefert. Die Bedeutung des Axioms liegt darin, daß es die Existenz von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften sichert.

Das Quadrupel $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ mit (1.1)–(1.9), (2.1)–(2.4), (3.1) heißt *Körper der reellen Zahlen.* Eine solche Struktur ist „im wesentlichen" eindeutig bestimmt, was wir hier aber nicht näher erläutern wollen. Die Elemente einer solchen Struktur nennen wir *reelle Zahlen.* Wenn wir im folgenden nur von „Zahlen" sprechen, sind stets reelle Zahlen gemeint.

4 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind insbesondere die Zahlen

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ 2 & := & 1+1 \\ 3 & := & 2+1 \\ 4 & := & 3+1 \\ & \text{u.s.w.} & \end{array}$$

enthalten. Sie heißen *natürliche Zahlen.* Das obenstehende „u.s.w." kann aber kaum als Definition dienen. Wir müssen also eine Definition der Menge der natürlichen Zahlen geben, und wir können das jetzt auch tun. Zur Menge der natürlichen Zahlen sollen selbstverständlich genau die Zahlen gehören, die man in der obigen Weise erhalten kann, daher die folgende

Definition. $\mathbb{N}$ sei die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$, die die Zahl 1 und mit x auch $x + 1$ enthält. Die Elemente von $\mathbb{N}$ heißen *natürliche Zahlen.*

Die „kleinste" Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit einer Eigenschaft E ist dabei zu verstehen als Durchschnitt aller Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft E. Der Durchschnitt einer Familie von Mengen ist völlig analog erklärt wie früher der Durchschnitt von zwei Mengen. Der Deutlichkeit halber wollen wir vorübergehend (d.h. nur in diesem Paragraphen) eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ *induktiv* nennen, wenn $1 \in M$ ist und mit $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ gilt. Zum Beispiel sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^+$ induktive Teilmengen. Das System (synonym für „die Menge") aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$ sei mit I bezeichnet. Dann haben wir also nach Definition

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in I} M \quad \stackrel{\text{Def.}}{=} \quad \{a | \ a \in M \text{ für alle } M \in I\}$$

$$= \quad \{a \in \mathbb{R} | \; a \text{ ist Element jeder induktiven Teilmenge von } \mathbb{R}\}.$$

Einige weitere Bezeichnungen:

Definition.

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, \\ \mathbb{Z} &:= \{a \in \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -a \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Die Elemente von $\mathbb{Z}$ heißen *ganze Zahlen.*

$$\mathbb{Q} := \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \; \exists n \in \mathbb{N} : a = \frac{m}{n} \right\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{Q}$ heißen *rationale Zahlen* (oder *Brüche*). Die Elemente von $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ heißen *irrationale Zahlen.*

Bemerkung. $\mathbb{Q}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und der Beziehung $<$ ist ebenfalls ein angeordneter Körper. In diesem Körper ist die Gleichung $x^2 = 2$ unlösbar.

Bemerkung. Daß es überhaupt irrationale Zahlen gibt, wird erst später bewiesen.

Wir zeigen nun, wie sich einige an sich wohlvertraute Eigenschaften natürlicher Zahlen aus dieser Definition streng herleiten lassen.

(4.1) **Beh.:** Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.

Beweis. [Beweis durch Widerspruch: Wir zeigen, daß aus der Negation (dem logischen Gegenteil) der Behauptung ein Widerspruch folgt.] Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es dann für $\mathbb{N}$ eine kleinste obere Schranke s. Da $s - 1$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$, woraus $s < n + 1$ folgt. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist, ist mit $n \in \mathbb{N}$ auch $n + 1 \in \mathbb{N}$, also ist s nicht obere Schranke für $\mathbb{N}$, ein Widerspruch. /.

(4.2) **Beh.:** Zu jedem $a \in \mathbb{R}^+$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.

Beweis. Angenommen, das wäre falsch. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}^+$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit $na \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $n \leq \frac{b}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu (4.1). /.

Satz (4.2) drückt eine besondere Eigenschaft der durch $<$ gegebenen Anordnung aus, die man auch die *archimedische* Eigenschaft nennt.

Die folgenden Konsequenzen werden später bei der Behandlung des Grenzwertbegriffes ständig benutzt.

(4.3) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R}^+ \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < a$.

Beweis. Nach (4.2) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > 1$, also mit $\frac{1}{n} < a$. /.

(4.4) **Beh.:** Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Ist $a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a = 0$.

Beweis. Andernfalls wäre $\frac{1}{a}$ eine obere Schranke für $\mathbb{N}$. /.

(4.5) **Beh.:** $\forall n \in \mathbb{N} : (n > 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N})$.

Beweis. Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}\}$ ist induktiv, also gleich $\mathbb{N}$. /.

Hier wurde benutzt: Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine induktive Teilmenge, so muß nach Definition von $\mathbb{N}$ auch $\mathbb{N} \subset M$ gelten, also ist $M = \mathbb{N}$. Hierauf stützt sich auch das häufig verwendete

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Dieses läßt sich folgendermaßen beschreiben. Es bezeichne A eine Aussage über natürliche Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(a) A gilt für die Zahl 1,

(b) Wenn A für die natürliche Zahl n gilt, dann auch für $n + 1$.

Dann gilt A für alle $n \in \mathbb{N}$.

Um dies einzusehen, betrachtet man die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid A \text{ gilt für } n\}.$$

Sie ist induktiv, muß also nach der obigen Bemerkung gleich $\mathbb{N}$ sein.

Um also zu beweisen, daß eine Behauptung für alle natürlichen Zahlen zutrifft, verfährt man folgendermaßen:

(a) „Induktionsanfang“: Man beweist, daß die Behauptung für die Zahl 1 zutrifft.

(b) „Induktionsschluß“: Unter der „Induktionsannahme“, die Behauptung treffe für ein $n \in \mathbb{N}$ zu, zeigt man, daß die Behauptung auch für $n + 1$ zutrifft.

Hierfür nun einige Beispiele.

(4.6) **Beh.:** $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in \mathbb{R} : (n < x < n+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N})$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ lautet die Behauptung:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (1 < x < 2 \Rightarrow x \notin \mathbb{N})$$

Sie ist richtig, weil die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \vee x \geq 2\}$ induktiv ist und daher $\mathbb{N} \subset M$ gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also $n = 1$ oder $n \geq 2$.

Induktionsschluß: Wir machen die *Induktionsannahme*, die Behauptung gelte für die natürliche Zahl n, also

$$\forall x \in \mathbb{R} : (n < x < n+1 \Rightarrow x \notin \mathbb{N}).$$

Sei jetzt $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $n+1 < x < n+2$. Dann folgt $n < x-1 < n+1$, nach Induktionsannahme also $x-1 \notin \mathbb{N}$. Wegen $x > 1$ folgt aus (4.5) jetzt $x \notin \mathbb{N}$. Die Behauptung ist also richtig für $n+1$. Damit ist gezeigt, daß sie für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. /.

Hieraus können wir den folgenden, häufig nützlichen Satz herleiten:

(4.7) **Satz** (Wohlordnung der natürlichen Zahlen): *In jeder nichtleeren Menge von natürlichen Zahlen gibt es ein kleinstes Element.*

Beweis. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$. Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall a \in A : n \leq a\}$.

1. Beh.: $\exists k \in M : k+1 \notin M$.

Beweis: Wäre das falsch, so wäre M induktiv, also $M = \mathbb{N}$. Wegen $A \neq \emptyset$ existiert ein $a \in A$, wegen $a+1 \in \mathbb{N}$ folgt $a+1 \leq a$, ein Widerspruch.

2. Beh.: k ist kleinstes Element von A.

Beweis: Wegen $k \in M$ ist $k \leq a$ für alle $a \in A$. Es bleibt $k \in A$ zu zeigen. Wegen $k+1 \notin M$ existiert ein $a_0 \in A$ mit $k+1 > a_0$. Aus $k \leq a_0 < k+1$ folgt nach (4.6) aber $k = a_0$. /.

Als wichtiges Anwendungsbeispiel haben wir den folgenden Satz:

(4.8) **Satz.** *Zu beliebigen reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis: O.B.d.A. sei $a \geq 0$ (andernfalls ersetze man a, b durch $a+m, b+m$ mit genügend großem $m \in \mathbb{N}$). Nach (4.3) gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Wähle ein solches n und setze $M := \{m \in \mathbb{N} | \ \frac{m}{n} > a\}$. Wegen (4.2) ist $M \neq \emptyset$. Nach (4.7) enthält M ein kleinstes Element k. Es ist also $a < \frac{k}{n}$. Wäre $\frac{k}{n} \geq b$, so wäre

$$\frac{k-1}{n} \geq b - \frac{1}{n} > b + a - b = a,$$

also $k - 1 \in M$, entgegen der Definition von k. Somit ist $a < \frac{k}{n} < b$. /.

Für die Aussage von Satz (4.8) sagt man auch: „$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$“.

Der Rest dieses Paragraphen befaßt sich mit Varianten und Anwendungen der vollständigen Induktion. Zunächst wollen wir dieses Beweisprinzip in zweifacher Weise ausdehnen. Zum einen kann der Induktionsanfang bei einem $n_0 \in \mathbb{N}$ statt bei 1 liegen, zum anderen dürfen wir als Induktionsannahme voraussetzen, daß die Behauptung jeweils für alle vorhergehenden natürlichen Zahlen $\geq n_0$ richtig ist:

(4.9) **Beh.:** Sei $M \subset \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$. Es gelte

(a) $n_0 \in M$,

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : (m \in M$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq m \leq n \Rightarrow n + 1 \in M)$.

Dann gilt $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} \subset M$.

Beweis. Andernfalls wäre die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \wedge n \notin M\}$ nicht leer und hätte daher nach (4.7) ein kleinstes Element k. Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \leq m \leq k-1$ gilt dann $m \in M$, also muß auch $k \in M$ sein, ein Widerspruch. /.

Neben Beweisen durch Induktion sind auch Definitionen durch Induktion möglich. Wir erläutern dies an einem Beispiel:

<u>Definition.</u> Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze $a^0 := 1$ und $a^1 := a$. Ist a^n für ein $n \in \mathbb{N}$ schon definiert, so setze $a^{n+1} := a \cdot a^n$. Damit ist a^n für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Man nennt ein solches Vorgehen „Definition durch vollständige Induktion“ oder „rekursive Definition“. Damit ist also folgendes gemeint. Sei $k \in \mathbb{N}$. Um für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ eine Zahl a_n zu definieren, definiert man zuerst a_k. Dann gibt man an, wie a_n zu definieren ist, wenn $n > k$ ist und die Zahlen $a_k, \ldots, a_{n-1}$ schon definiert sind. Daß damit a_n in der Tat für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ definiert ist, ist plausibel. Die Möglichkeit einer rekursiven Definition läßt sich durch Ausnutzung