der Eigenschaften von $\mathbb{N}$ streng begründen, was hier aber nicht geschehen soll. (Statt Zahlen können die a_n auch Elemente irgendwelcher Mengen sein.)

Über die so definierten *Potenzen* beweisen wir nun einige einfache Aussagen.

(4.10) **Beh.:** $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \forall m, n \in \mathbb{N} : a^m a^n = a^{m+n}$.

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$ (nach Definition). Sei sie bewiesen für ein $n \geq 1$. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$a^m a^{n+1} \overset{\text{Def.}}{=} a^m a^n a \overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} a^{m+n} a \overset{\text{Def.}}{=} a^{m+n+1}.\ \ /.$$

(4.11) **Beh.** (Bernoullische Ungleichung):

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0 : (a > -1 \Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na).$$

Beweis. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Sei sie bewiesen für ein $n \geq 1$. Dann folgt $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1 + (n+1)a$. /.

(4.12) **Beh.:** Sei $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$.

(1) $b > 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : b^n > a$,

(2) $0 < b < 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : b^n < a$.

Beweis. (1) Nach (4.2) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(b-1) > a-1$. Nach (4.11) folgt

$$b^n = (1 + (b-1))^n \geq 1 + n(b-1) > 1 + a - 1 = a.$$

(2) Aus $0 < b < 1$ folgt $\frac{1}{b} > 1$, nach (1) existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{1}{b}\right)^n > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b^n} > \frac{1}{a}$ (denn $\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$, wie sofort durch Induktion folgt). $\Rightarrow b^n < a$. /.

Es folgen nun noch einige Aussagen über

Summen und Produkte

(4.13) **Beh.:** $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion nach n:

Induktionsanfang: Zu zeigen ist die Behauptung

$$\forall m \in \mathbb{N} : 1 + m \in \mathbb{N}.$$

Sie ist richtig nach Definition von $\mathbb{N}$.

Induktionsschluß: Wir machen die Annahme

$$\forall m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}.$$

Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt dann $(n+1) + m = n + (m+1) \in \mathbb{N}$ nach Induktionsannahme. Die Behauptung gilt also auch für $n + 1$. /.

(4.14) **Beh.:** $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} : nm \in \mathbb{N}$

Beweis: analog /.

(4.15) **Beh.:** $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} : (m > n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N})$.

Beweis: ähnlich /.

Durch rekursive Definition können wir auch Summen und Produkte von n reellen Zahlen erklären. Für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sind $a_1 + a_2$ und $a_1 \cdot a_2$ bereits erklärt. Nehmen wir an, für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ seien die Summe $a_1 + \ldots + a_n$ und das Produkt $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ bereits definiert. Dann definieren wir für $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_{n+1} &:= (a_1 + \ldots + a_n) + a_{n+1}, \\ a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} &:= (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}. \end{aligned}$$

Man kann nun leicht aus dem Assoziativgesetz durch vollständige Induktion herleiten, daß

$$(a_1 + \ldots + a_p) + (a_{p+1} + \ldots + a_n) = a_1 + \ldots + a_n$$

ist. Daraus kann man dann, ebenfalls durch Induktion, herleiten, daß man bei einem Ausdruck aus Summenzeichen und Klammern überhaupt die Klammern weglassen kann (allgemeines Assoziativgesetz). Aus dem Kommutativgesetz leitet man durch Induktion leicht her, daß es bei einer Summe $a_1 + \ldots + a_n$ nicht auf die Reihenfolge der Summanden ankommt (allgemeines Kommutativgesetz). Analoges gilt für die Multiplikation. Aus dem Distributivgesetz leitet man durch Induktion das allgemeine Distributivgesetz her:

$$a(a_1 + \ldots + a_n) = aa_1 + \ldots + aa_n.$$

Beim Arbeiten mit derartigen Ausdrücken ist die Verwendung von Summen- und Produktzeichen praktisch:

Bezeichnungen

$$\sum_{i=k}^{n} a_i \quad := \quad a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n, \qquad \text{falls } n \geq k$$

$$\prod_{i=k}^{n} a_i \quad := \quad a_k a_{k+1} \cdots a_n, \qquad \text{falls } n \geq k.$$

Aus Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz folgen einige Rechenregeln für Summen, z.B.

$$\left(\sum_{i=k}^{l} a_i\right)\left(\sum_{j=m}^{n} b_j\right) = \sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_i b_j.$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch zwei häufig auftretende Summen bzw. Produkte berechnen:

(4.16) **Beh.** (Summe einer endlichen geometrischen Reihe): Für $q \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Setze $\sum_{k=0}^{n} q^k =: x$. Dann ist

$$qx = q + q^2 + \ldots + q^{n+1} = x - 1 + q^{n+1},$$

also

$$x = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad /.$$

Zur nun folgenden Berechnung der Potenz $(a + b)^n$ sind zunächst einige Definitionen erforderlich.

Definition.

$$n! \quad := \quad 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

$$0! \quad := \quad 1$$

$$\binom{n}{k} \quad := \quad \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \qquad \text{für } n, k \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{0} \quad := \quad 1 \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Man liest $n!$ als „n Fakultät“ und $\binom{n}{k}$ als „n über k“. Die Größen $\binom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten*. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{für } k, n \in \mathbb{N}_0, n \geq k \\
\binom{n}{k} &= 0 \qquad \text{für } k > n \\
\binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Beweis der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{kn! + (n+1-k)n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir zeigen:

(4.17) **Beh.** (Binomische Formel): Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis (Induktion): Für $n = 1$ gilt die Formel. Sei sie bewiesen für ein $n \geq 1$. Dann folgt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j b^{n+1-j} + b^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}. \ /.
\end{aligned}$$

Kapitel 2: Abbildungen

5 Der Funktionsbegriff

In diesem Paragraphen geht es hauptsächlich um die Vereinbarung einiger Sprechweisen und die Festlegung von Bezeichnungen. Es kommen also vorwiegend Definitionen vor und fast keine Sätze.

Der Begriff der Funktion, der im folgenden präzisiert werden soll, wird auch im täglichen Leben verwendet. Was meinen wir etwa, wenn wir sagen, beim Autofahren sei der Luftwiderstand eine Funktion der Geschwindigkeit? Gemeint ist doch, daß zu jedem Geschwindigkeitswert ein wohlbestimmter Wert des Luftwiderstandes gehört. Es ist aber nicht unbedingt gemeint, daß wir diesen durch eine explizite Formel oder Berechnungsvorschrift angeben können. Historisch mag es wohl so gewesen sein, daß man unter einer Funktion zunächst eine konkrete Berechnungsvorschrift verstanden hat, aber dies hat sich als zu eng erwiesen. Wesentlich an einer Funktion, wie man sie heute versteht, ist lediglich, daß durch jeden „Argumentwert“ der zugehörige „Funktionswert“ eindeutig bestimmt ist. Unter einer Funktion wird man also eine eindeutige Zuordnung verstehen. Zum Beispiel beschreibt auch jedes Telefonbuch eine Funktion: Jedem Inhaber eines Telefonanschlusses innerhalb eines gewissen Gebietes wird darin seine Telefonnummer zugeordnet. Wenn man dieses Beispiel im Sinn behält, wird man nicht in die Gefahr geraten, eine Funktion für eine explizite Berechnungsvorschrift zu halten.

Wir wollen eine formale Definition einer Funktion geben. Dazu müssen also eine Menge M_1, die „Definitionsmenge“, und eine Menge M_2, die „Zielmenge“ oder „Wertemenge“ der zu definierenden Funktion gegeben sein. Jedem $x \in M_1$ soll ein eindeutig bestimmter Funktionswert $y \in M_2$ zugeordnet sein. Die Zuordnung ist vollständig festgelegt, wenn wir zu jedem $x \in M_1$ und jedem $y \in M_2$ wissen, ob y dem Element x zugeordnet ist oder nicht. Wir können daher die Zuordnungsvorschrift geradezu identifizieren mit der Angabe aller geordneten Paare (x, y), für die y dem Element x zugeordnet ist.

Hierzu zunächst eine Vorbemerkung. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zu n Objekten $x_1, \ldots, x_n$ (die durch die Numerierung von 1 bis n mit einer Reihenfolge versehen sind) bilden wir ein neues Objekt $(x_1, \ldots, x_n)$, das wir das (geordnete) *n-Tupel* von $x_1, \ldots, x_n$ nennen (2-Tupel heißen auch *Paare*, 3-Tupel *Tripel*). Wir wollen hierfür keine formale Definition geben (obwohl dies unter alleiniger Verwendung des Mengenbegriffs möglich wäre), sondern lediglich eine Gleichheitsdefinition festlegen:

$$\begin{aligned} & (x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \\ :\Leftrightarrow \quad & x_1 = y_1 \quad \text{und} \quad x_2 = y_2 \quad \text{und} \ \ldots \ \text{und} \quad x_n = y_n. \end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> Mit (a, b) haben wir sowohl das offene Intervall von a bis b als auch das geordnete Paar mit Einträgen a und b bezeichnet. Diese (an sich unkorrekte) Mehrdeutigkeit gibt aber nicht Anlaß zu Verwechslungen, da aus dem Zusammenhang stets klar sein wird, was gemeint ist. In Zweifelsfällen wird angegeben, ob das geordnete Paar oder das Intervall gemeint ist.

Sind nun $M_1, \ldots, M_n$ Mengen, so nennt man die Menge

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in M_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in M_n\}$$

das *(kartesische) Produkt* der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ (in dieser Reihenfolge). Man schreibt auch

$$\underbrace{M \times \ldots \times M}_{n-\text{mal}} =: M^n.$$

Jetzt können wir definieren (M_1, M_2 seien Mengen):

<u>Definition.</u> Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) von M_1 in M_2 ist eine Teilmenge f der Produktmenge $M_1 \times M_2$ derart, daß zu jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ existiert mit $(x, y) \in f$. M_1 heißt *Definitionsbereich* und M_2 *Wertebereich* von f.

<u>Schreibweisen.</u> Statt $(x, y) \in f$ schreibt man $y = f(x)$ und nennt $f(x)$ das *Bild von x unter f*, auch den *Wert von f an der Stelle x*.

Die Abkürzung

$$f : M_1 \to M_2$$

bedeutet, daß f eine Funktion von M_1 in M_2 ist. In konkreten Fällen schreibt man auch

$$\begin{array}{rccc} f: & M_1 & \to & M_2 \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{oder} \qquad f : x \mapsto f(x) \qquad \text{für } x \in M_1.$$

Bemerkung. Am Anfang von §1 hatten wir gesagt: „Je zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ sei ein Element $a + b$, ihre Summe, eindeutig zugeordnet.“ Wir können das jetzt so präzisieren, daß eine Funktion $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sein soll. Ebenso ist die Multiplikation $\cdot$ eine Funktion von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Ferner hatten wir am Anfang von §2 gesagt, daß auf der Menge $\mathbb{R}$ eine Beziehung $<$ gegeben sein soll, die zwischen zwei Elementen von $\mathbb{R}$ bestehen kann. Das ist ein Beispiel für eine (zweistellige) *Relation* über $\mathbb{R}$. Allgemein ist eine zweistellige Relation über einer Menge M einfach eine Teilmenge von $M \times M$. Ist ρ eine Relation über M, so definiert man für $x, y \in M$

$$x\rho y :\Leftrightarrow (x, y) \in \rho.$$

Für spezielle Relationen hat man besondere Bezeichnungen, wie zum Beispiel $<$ in §2.

Wir kehren zu den Funktionen zurück und vereinbaren einige wichtige Bezeichnungen.

Bezeichnungen.

Sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. Für $A \subset M_1$ heißt

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\} \\ &= \{y \in M_2 \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \end{aligned}$$

das *Bild* von A unter f. Die Menge $f(M_1)$ heißt *Bild* oder *Wertemenge* von f und wird auch mit $\operatorname{Bild} f$ bezeichnet. Für $B \subset M_2$ heißt

$$f^{-1}(B) := \{x \in M_1 \mid f(x) \in B\}$$

das *Urbild* von B bezüglich f.

f heißt *injektiv* (Injektion) $\Leftrightarrow \forall x, y \in M_1 : (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

f heißt *surjektiv* (Surjektion) auf $M_2 \Leftrightarrow f(M_1) = M_2$

f heißt *bijektiv* (Bijektion) auf $M_2 \Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv auf M_2.

Ist $f : M_1 \to M_2$ injektiv, so ist

$$f^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in M_1)\}$$

eine bijektive Funktion von $\operatorname{Bild} f = f(M_1)$ auf M_1; f^{-1} heißt die *Umkehrfunktion* von f. Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x && \text{für alle } x \in M_1, \\ f(f^{-1}(y)) &= y && \text{für alle } y \in \operatorname{Bild} f. \end{aligned}$$

Sind $f : M_1 \to M_2$ und $g : M_3 \to M_4$ Funktionen mit $\operatorname{Bild} f \subset M_3$, so definiert man

$$g \circ f := \{(x, g(f(x))) \mid x \in M_1\}.$$

$g \circ f$ ist also eine Funktion von M_1 in M_4. Es gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in M_1$. $g \circ f$ heißt *Verkettung* oder *Komposition* von g und f.

Für eine beliebige Menge M ist die *Identität* auf M erklärt als die Funktion $\mathrm{id}_M : M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$. Ist $f : M_1 \to M_2$ eine Bijektion auf M_2 und f^{-1} die Umkehrfunktion, so hat man offenbar

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{M_1}, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{M_2}.$$