Ist $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion und $M \subset M_1$, so heißt

$$f|M := \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$$

die *Einschränkung* oder *Restriktion* von f auf M.

Im weiteren Verlauf der Analysis werden wir es zunächst mit speziellen Funktionen, den Folgen, zu tun haben.

Definition. Sei M eine Menge. Eine *Folge in M* ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ (an die Stelle von $\mathbb{N}$ kann auch $\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq m_0\}$ treten).

Schreibweisen. Ist $f : \mathbb{N} \to M$ eine Folge, so schreibt man statt $f(n)$ meist f_n und statt f oft

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{oder} \qquad (f_1, f_2, f_3, \ldots).$$

Man nennt f_n auch das *n-te Folgenglied.*

Achtung! Man verwechsle nicht die Folge $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ mit der Menge $\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$. Zum Beispiel ist $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ die Abbildung, die der Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $(-1)^n$ zuordnet, und $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ ist die Menge $\{1, -1\}$.

Später werden wir es vorwiegend mit reellen Funktionen zu tun haben.

Definition. Eine *reelle Funktion* ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$.

Einige mögliche Eigenschaften reeller Funktionen:

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Sie heißt *beschränkt*, wenn ihr Wertebereich beschränkt (d.h. nach oben und nach unten beschränkt) ist, also:

f heißt *beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D : |f(x)| \leq c.$

Ferner:

f heißt *monoton wachsend (streng monoton wachsend)* $:\Leftrightarrow \forall x, y \in D : (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ (bzw. $<$).

Analog werden definiert: monoton fallend, streng monoton fallend, monoton (= wachsend oder fallend), streng monoton.

Um in diesem Abschnitt wenigstens etwas zu beweisen, zeigen wir:

(5.1) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subset \mathbb{R}$) streng monoton. Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} streng monoton.*

Beweis. Sei f etwa streng monoton wachsend (im anderen Fall schließt man analog). Sei $x, y \in D, x \neq y$. Aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, also $f(x) \neq f(y)$, analog für $x > y$. Also ist f injektiv. Somit existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$ mit $W :=$ Bild f. Sei $u, v \in W$, $u < v$. Dann ist $u = f(x)$, $v = f(y)$ mit geeigneten $x, y \in D$. Wäre $y \leq x$, so folgte $f(y) \leq f(x)$, also $v \leq u$, q.e.a. Somit ist $f^{-1}(u) = x < y = f^{-1}(v)$; also ist auch f^{-1} streng monoton wachsend. ■

6 Abzählbarkeit

Der nun zur Verfügung stehende Begriff der bijektiven Abbildung erlaubt eine Unterscheidung der „Größe“ von Mengen durch Vergleich mit $\mathbb{N}$ oder Teilmengen davon.

Bezeichnung. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$, also $A_0 = \emptyset$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, u.s.w. A_n heißt der n-te Abschnitt von $\mathbb{N}$.

(6.1) **Satz** (Schubfachprinzip). *Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gibt es keine injektive Abbildung $f : A_n \to A_k$.*

Beweis. Angenommen, das wäre falsch. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine injektive Abbildung $f : A_{n+1} \to A_n$ (denn jede Abbildung $f : A_{n+1} \to A_k$ mit $k < n$ ist auch Abbildung von A_{n+1} in A_n). Sei n die (nach dem Wohlordnungssatz (4.7) existierende) kleinste derartige Zahl.

1. Fall: $n \notin$ Bild f oder $n = f(n + 1)$.
Setze $g := f|A_n$ (Einschränkung von f auf A_n.)

2. Fall: $n = f(k)$ für ein $k < n + 1$.
Setze
$$g(m) := \begin{cases} f(m) & \text{für } m \in A_n \setminus \{k\} \\ f(n+1) & \text{für } m = k. \end{cases}$$

In jedem Fall ist g eine injektive Abbildung von A_n in A_{n-1}. Das widerspricht der Wahl von n als kleinster Zahl mit einer derartigen Abbildung. ■

Definition. Eine Menge M heißt *n-elementig*, wenn es eine Bijektion von A_n auf M gibt. M heißt *endlich*, wenn M n-elementig für ein $n \in \mathbb{N}$ oder $M = \emptyset$ ist. Andernfalls heißt M *unendlich.*

Aus Satz (6.1) folgt insbesondere, daß M n-elementig nur für ein n sein kann; ferner folgt, daß es für eine endliche Menge keine Bijektion auf eine echte Teilmenge geben kann. Bei unendlichen Mengen ist das anders, zum Beispiel ist

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array},$$

eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf die echte Teilmenge $\{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 2\}$.

<u>Definition.</u> Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf M gibt, und *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Man beachte, daß eine abzählbare Menge endlich oder unendlich sein kann. Im letzteren Fall heißt sie *abzählbar unendlich*.

Der folgende Satz ist in Anbetracht von (4.8) zunächst vielleicht etwas überraschend:

(6.2) **Satz**. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Betrachte das untenstehende Schema. Jede rationale Zahl $\neq 0$ ist von der Form $\frac{m}{n}$ oder $-\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Daher kommt im Schema jede rationale Zahl vor (in der Tat öfter, was aber nicht stört). Durchläuft man das Schema, indem man den Pfeilen folgt, so wird dadurch offenbar eine fortlaufende Numerierung erklärt, also eine Surjektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ gegeben. (Man könnte die Abbildung explizit hinschreiben.)

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{1} & \longrightarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \longrightarrow & -\frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \longrightarrow & -\frac{3}{1} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & -\frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & -\frac{3}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & -\frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & -\frac{3}{3} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & -\frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & -\frac{3}{4} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & -\frac{1}{5} & \cdots & & & & & & & &
\end{array}
$$

■

Bemerkung. Mit derselben Beweisidee läßt sich offenbar zeigen: Die Vereinigung einer abzählbaren Familie (= Menge) von abzählbaren Mengen ist abzählbar.

Im Gegensatz hierzu ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar. Um das zu beweisen, zeigen wir zunächst das auch später sehr wichtige „Prinzip der Intervallschachtelung“:

(6.3) **Satz** (Intervallschachtelungsprinzip). *Sei $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle (also $J_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n \leq b_n$ für*

$n \in \mathbb{N}$) *mit der Eigenschaft*

$$J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots.$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ *mit* $s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k$ für $k < n$, also ist die Menge $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom besitzt sie in $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke s. Gäbe es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $s \notin J_k$, so wäre $s < a_k$ oder $s > b_k$. Im ersten Fall ist s nicht obere Schranke für A, im zweiten Fall ist s nicht kleinste obere Schranke, da b_k obere Schranke für A ist, q.e.a. ∎

Bemerkung. In (6.3) ist die Voraussetzung, daß die Intervalle J_n abgeschlossen und beschränkt sind, nicht entbehrlich, z.B. gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty) = \emptyset, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset.$$

(6.4) **Satz.** *Die Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Angenommen, das wäre falsch. Dann gibt es eine Surjektion f von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$. Setze $f(n) = x_n$, also $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Wähle ein Intervall $J_1 = [a_1, b_1]$ mit $a_1 < b_1$ und $x_1 \notin J_1$. Ist J_n schon definiert, so wähle ein Intervall $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $a_{n+1} < b_{n+1}$ und $J_{n+1} \subset J_n$, so daß $x_{n+1} \notin J_{n+1}$ ist. Damit ist rekursiv eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert, die die Voraussetzungen von (6.3) erfüllt. Es gibt also eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $s = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Wegen $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $s = x_k$. Nach Konstruktion ist aber $x_k \notin J_k$, q.e.a. ∎

Aus den Sätzen (6.2) und (6.4) folgt, daß auch die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar ist (wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar, so wäre $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ abzählbar). Insbesondere ist damit die Existenz von irrationalen Zahlen gezeigt.

Kapitel 3: Konvergenz

7 Konvergente Folgen

Unter Folgen sollen, solange nichts anderes gesagt ist, Folgen in $\mathbb{R}$ verstanden werden.

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, sei $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen a*, und a heißt *Grenzwert* oder *Limes* dieser Folge, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

In Kurzschreibweise lautet die Definition:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon)$$

Eine Folge heißt *konvergent*, oder sie *konvergiert*, wenn sie konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$ ist. Eine gegen 0 konvergente Folge heißt *Nullfolge*. Eine Folge heißt *divergent*, oder *sie divergiert*, wenn sie nicht konvergiert.

(7.1) **Satz.** *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a und gegen b. Angenommen, es wäre $a \neq b$. Zu $\epsilon := \frac{1}{2}|a-b|$ existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für $n \geq n_0$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \epsilon$ für $n \geq n_1$. Für beliebiges $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt dann nach (2.15) $|a-b| = |a - a_n - (b - a_n)| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \epsilon + \epsilon = |a - b|$, q.e.a. ■

Schreibweise. Für die Aussage „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a“ schreibt man auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad \text{für } n \to \infty.$$

Zur Vereinfachung der Sprechweise sind ferner die folgenden Bezeichnungen zweckmäßig:

Definition. Sei $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Das Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ heißt *ϵ-Umgebung* von a. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *Umgebung von a*, wenn sie eine ϵ-Umgebung von a für geeignetes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ enthält.

„Fast alle“ heißt: alle, bis auf endlich viele.

Damit können wir auch formulieren:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	$\Leftrightarrow$	Zu jeder Umgebung U von a existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq n_0$
	$\Leftrightarrow$	Jede Umgebung von a enthält a_n für fast alle n.

Bemerkungen

(a) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $b_n = a_n$ für fast alle n folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

(b) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$ für $k \in \mathbb{N}$, und umgekehrt.

Manchen Folgen kann man schon aufgrund des folgenden Satzes ansehen, daß sie nicht konvergieren:

(7.2) **Satz.** *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt also

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Mit $c := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}$ gilt folglich $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Einfache Beispiele

(1) Sei $a_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bew.: Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wähle $n_0 > 1/\epsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon. \;\; /.$$

(2) Sei $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Bew.: Angenommen, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq n_0$. Für beliebiges $n \geq n_0$ gilt dann

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a - (a_n - a)| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 2,$$

q.e.a. /.

(3) Sei $a_n = n/2^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Bew.: Durch Induktion beweist man leicht: $n^2 \leq 2^n$ für $n \geq 4$. Zu gegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ wähle $n_0 > \max\{\frac{1}{\epsilon}, 4\}$. Für $n \geq n_0$ gilt dann

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| < \frac{1}{n} < \epsilon./.$$

(4) Sei $a_n = b^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ($b \in \mathbb{R}$ gegeben).

1.Fall: $|b| < 1$. Aus (4.12) folgt $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$.

2.Fall: $|b| > 1$. Die Folge $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen (4.12) nicht beschränkt, also nach (7.2) divergent.

3.Fall: $b = 1$. trivial.

4.Fall: $b = -1$. divergent (s.o.).

Der folgende Satz faßt einige wichtige Rechenregeln für Grenzwerte zusammen.

(7.3) **Satz.** *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann sind die Folgen $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab, \quad \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a.$$

Ist $a \neq 0$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für $n \geq m$, und die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq m}$ ist konvergent gegen $1/a$.

Beweis.

(1) $a_n + b_n$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon/2$ für $n \geq n_0$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \epsilon/2$ für $n \geq n_1$. Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt also

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) $a_n b_n$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach (7.2) existiert ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $|b_n| \leq c$ für $n \in \mathbb{N}$. Ferner existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{c + |a|}, \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{c + |a|} \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Für alle $n \geq n_0$ gilt also

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{c + |a|} c + |a| \frac{\epsilon}{c + |a|} = \epsilon. \end{aligned}$$

(3) λa_n. Folgt aus (2), wenn $b_n = \lambda$ gesetzt wird.

(4) $1/a_n$

Sei also $a \neq 0$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \min\{\frac{1}{2}|a|, \frac{1}{2}|a|^2\epsilon\}$ für $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ gilt also

$$|a| = |a - a_n + a_n| \leq |a - a_n| + |a_n| < \frac{1}{2}|a| + |a_n|,$$

folglich $|a_n| > \frac{1}{2}|a|$, insbesondere $a_n \neq 0$, und daher

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a_n||a|} < \frac{\frac{1}{2}|a|^2\epsilon}{\frac{1}{2}|a|^2} = \epsilon.$$

■

(7.4) **Satz.** *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $a_n \leq b_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$, *so ist* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Achtung! Auch aus der schärferen Voraussetzung $a_n < b_n$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt nur $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Beweis von (7.4). Angenommen, es wäre $a := \lim a_n > \lim b_n =: b$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}(a - b) \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{1}{2}(a - b) \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Für solches n folgt

$$\left.\begin{array}{l} a - a_n < \frac{1}{2}(a-b) \Rightarrow a_n > \frac{1}{2}(a+b) \\ b_n - b < \frac{1}{2}(a-b) \Rightarrow b_n < \frac{1}{2}(a+b) \end{array}\right\} \Rightarrow a_n > b_n, \text{ q.e.a.}$$

■

Wir geben noch ein ganz einfaches Beispiel für die Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - 15n} = ?$$

Es gilt

$$\frac{5n^3 + 2n^2 + 1}{2n^3 - 15n} = \frac{5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}}{2 - \frac{15}{n^2}} \longrightarrow \frac{5+0+0}{2-0} = \frac{5}{2}$$

für $n \to \infty$.

Wir ergänzen die Definition der Konvergenz noch durch die folgende, manchmal bequeme Verabredung.

Definition. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* ∞, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > c \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Beispiel: Aus $\lim a_n = 0$ und $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\lim 1/a_n = \infty$.

Kriterien für Konvergenz

Häufig wird eine Folge vorliegen, von der man Konvergenz vermutet, ohne den eventuell existierenden Grenzwert zu kennen. Man benötigt daher Kriterien für Konvergenz, in denen nicht explizit der Grenzwert vorkommt. Wir beweisen zunächst eine hinreichende Bedingung dieser Art, später eine notwendige und hinreichende.

(7.5) **Satz.** *Jede monotone, beschränkte Folge in* $\mathbb{R}$ *konvergiert.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, etwa monoton wachsend. Nach dem Vollständigkeitsaxiom hat die Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine kleinste obere Schranke s.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s - \epsilon$, denn andernfalls wäre $s - \epsilon$ obere Schranke. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a_n \geq a_{n_0} > s - \epsilon$ für $n \geq n_0$. Da s obere Schranke ist, gilt außerdem $a_n \leq s$, also $|a_n - s| = s - a_n < \epsilon$ für $n \geq n_0$. Somit ist $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. ■

Diese hinreichende Konvergenzbedingung ist sehr nützlich, aber natürlich nur begrenzt anwendbar. Für feinere Konvergenzbetrachtungen sind die folgenden Begriffsbildungen zweckmäßig.

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots)$$

Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aus der Definition folgt unmittelbar: Konvergiert eine Folge gegen a, so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen a.

Definition. Eine Zahl heißt *Häufungswert* (oder *Häufungspunkt*) einer Folge, wenn sie Grenzwert einer Teilfolge ist.

Beispiel. $a_n := (-1)^n + 1/n$. Die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, die Teilfolge $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen -1. Diese beiden Zahlen sind also Häufungswerte der Folge; andere Häufungswerte gibt es offenbar nicht.

Der folgende Satz (das Beste, was man als „Umkehrung" von (7.2) aussagen kann), ist sehr wichtig und wird an vielen Stellen benutzt.

(7.6) **Satz** (von Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Wir definieren zunächst rekursiv eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ abgeschlossener Intervalle $J_n = [a_n, b_n]$ derart, daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $J_n \subset J_{n-1}$,

(b) für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $x_k \in [a_n, b_n]$,

(c) $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

Hierzu werde $[a_0, b_0]$ so gewählt, daß $x_k \in [a_0, b_0]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt (das ist möglich, da die Folge beschränkt ist). Sei $[a_n, b_n]$ schon definiert, so daß $(a), (b), (c)$ erfüllt sind. Wir halbieren das Intervall $[a_n, b_n]$ durch seinen Mittelpunkt $z = (a_n + b_n)/2$. Wenigstens eines der Intervalle $[a_n, z]$, $[z, b_n]$ enthält x_k für unendlich viele k; ein solches Teilintervall nehmen wir als $[a_{n+1}, b_{n+1}] = J_{n+1}$. Dann sind $(a), (b), (c)$ auch für J_{n+1} erfüllt. Damit ist die Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert.

Nun definieren wir rekursiv eine Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$. Wähle k_1 so, daß $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$ gilt. Sei k_n mit $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$ schon definiert. Das Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ enthält x_k für unendlich viele k, also ist die Menge $\{k \in \mathbb{N} |\ k > k_n$ und $x_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ nicht leer. Ihr kleinstes Element nehmen wir als k_{n+1}. Damit ist die Folge rekursiv definiert.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (6.3) gibt es eine reelle Zahl $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Wegen $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$ und $x \in [a_n, b_n]$ gilt

$$|x_{k_n} - x| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$. ■

Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so auch (wie früher bemerkt) jede Teilfolge, also ist a der einzige Häufungswert. Für beschränkte Folgen läßt sich dies umkehren:

(7.7) **Satz.** *Hat eine beschränkte Folge genau einen Häufungswert, so konvergiert sie gegen diesen Häufungswert.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und a ihr einziger Häufungswert. Angenommen, die Folge konvergiere nicht gegen a. Das bedeutet:

$$\exists\ \epsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon.$$

Wir nehmen ein solches $\epsilon > 0$. Es gibt dann ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_1} - a| \geq \epsilon$. Ist n_k schon definiert, so ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} | n \geq n_k + 1$ und $|a_n - a| \geq \epsilon\}$ nicht leer; sei n_{k+1} ihr kleinstes Element. Damit ist rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ definiert mit $|a_{n_k} - a| \geq \epsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da sie beschränkt ist, besitzt sie nach (7.6) eine konvergente Teilfolge. Für deren Grenzwert b gilt $|b - a| \geq \epsilon$, also hat die ursprüngliche Folge zwei verschiedene Häufungswerte, q.e.a. ■

Nun sind wir in der Lage, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge aufzustellen, das nicht explizit auf den Grenzwert bezugnimmt. Eine notwendige Bedingung für Konvergenz liegt nahe, indem man den Grenzwert eliminiert: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon/2$ für $n \geq n_0$. Für alle $m, n \geq n_0$ gilt also

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Diese für die Konvergenz notwendige Eigenschaft erweist sich auch als hinreichend. Zwecks größerer Klarheit und vor allem im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen ist eine Definition angebracht:

Definition. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_m - a_n| < \epsilon$ für alle $m, n \geq n_0$.

(7.8) **Satz** (Konvergenzkriterium von Cauchy). *Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Daß jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, wurde bereits gezeigt. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

1. Beh.: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Bew.: Da die Folge Cauchy-Folge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < 1$ für $m, n \geq n_0$. Für alle $n \geq n_0$ gilt also $|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$. Mit $c := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ gilt also $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Nun folgt aus (7.6), dem Satz von Bolzano-Weierstraß, daß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert. Sei a ihr Grenzwert.

2. Beh.: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Bew.: Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für } m, n \geq n_0.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $n_j \geq n_0$ und

$$|a_{n_j} - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für alle $n \geq n_0$ gilt also

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{n_j} + a_{n_j} - a| \leq |a_n - a_{n_j}| + |a_{n_j} - a| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gezeigt. ∎

Wir gehen noch auf eine Begriffsbildung ein, die bei feineren Konvergenzuntersuchungen bzw. bei nicht konvergenten Folgen von Nutzen ist. Zunächst sei daran erinnert, daß wir für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ wird die kleinste obere Schranke, falls sie existiert, auch mit

$$\sup M = \textit{Supremum} \text{ von } M$$