und die größe untere Schranke mit

$$\inf M = \textit{Infimum} \text{ von } M$$

bezeichnet haben.

<u>Definition.</u> Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k |\, k \geq n\})$$

der *Limes superior* der Folge, und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k |\, k \geq n\})$$

heißt *Limes inferior* der Folge.

Zu dieser Definition ist eine Erläuterung erforderlich. Setzt man

$$b_n := \sup\{a_k |\, k \geq n\} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

so ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend; da sie beschränkt ist, existiert nach (7.5) der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n$. Man kann also in der Tat wie oben definieren. Entsprechendes gilt für $\liminf$.

<u>Beispiel.</u> $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. Es ist

$$\sup\{a_k | k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n}, \text{ falls } n \text{ gerade,} \\ \\ 1 + \dfrac{1}{n+1}, \text{ falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$. Ferner ist

$$\inf\{a_k | k \geq n\} = \begin{cases} -(1 + \dfrac{1}{n}), \text{ falls } n \text{ ungerade,} \\ \\ -(1 + \dfrac{1}{n+1}), \text{ falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

also $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

Der folgende Satz enthält eine äquivalente Definition, die oft besser zu handhaben ist als die ursprüngliche.

(7.9) **Satz.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $\limsup a_n \leq a \Leftrightarrow$ *Für jedes* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ist die Menge*
$\{k \in \mathbb{N} |\, a_k \geq a + \epsilon\}$ *endlich.*
(2) $\limsup a_n \geq a \Leftrightarrow$ *Für jedes* $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *ist die Menge*
$\{k \in \mathbb{N} | a_k \geq a - \epsilon\}$ *unendlich.*
Entsprechendes gilt für $\liminf$.

Beweis. (1) „$\Rightarrow$“: Sei $\limsup a_n \leq a$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Wäre die Menge $\{k \in \mathbb{N} |\, a_k \geq a + \epsilon\}$ unendlich, so wäre

$$\sup\{a_k |\, k \geq n\} \geq a + \epsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also $\limsup a_n \geq a + \epsilon > a$, q.e.a.

„$\Leftarrow$“: Sei $\{k \in \mathbb{N} |\, a_k \geq a+\epsilon\}$ endlich für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gibt es zu gegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k < a + \epsilon$ für $n \geq n_0$, also

$$\sup\{a_k |\, k \geq n\} \leq a + \epsilon \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Es folgt $\limsup a_n \leq a + \epsilon$; da $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, folgt $\limsup a_n \leq a$.

(2) „$\Rightarrow$“: Sei $\limsup a_n \geq a$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Wäre die Menge $\{k \in \mathbb{N} |\, a_k \geq a - \epsilon\}$ endlich, so existierte ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k < a - \epsilon$ für $n \geq n_0$, also

$$\sup\{a_k |\, k \geq n\} \leq a - \epsilon \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Daraus folgt $\limsup a_n \leq a - \epsilon < a$, q.e.a.

„$\Leftarrow$“: Sei $\{k \in \mathbb{N} |\, a_k \geq a - \epsilon\}$ unendlich für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$

$$\sup\{a_k |\, k \geq n\} \geq a - \epsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also ist $\limsup a_n \geq a - \epsilon$. Da $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, folgt $\limsup a_n \geq a$. ■

Der folgende Satz macht die Bedeutung von Limes superior und Limes inferior deutlicher und erklärt zugleich die Wahl dieser Bezeichnungen.

(7.10) **Satz.** *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge. Dann ist* $\limsup a_n$ *der größte und* $\liminf a_n$ *der kleinste Häufungswert dieser Folge.*

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $\limsup$ zu beweisen. Sei H die Menge der Häufungswerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach (7.6) ist $H \neq \emptyset$, und H ist beschränkt. Setze $s := \sup H$ und $\limsup a_n =: a$.

Nach (7.9)(1) ist für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ die Menge $\{k \in \mathbb{N} |\, a_k \geq a + \epsilon\}$ endlich. Also kann keine Zahl $\geq a + \epsilon$ Grenzwert einer Teilfolge (d.h. Häufungswert) sein. Für alle $h \in H$ gilt also $h \leq a$, folglich ist $s \leq a$.

Beh.: $a \in H$ [Daraus folgt dann $a \leq s$, also $a = s$.]

Bew.: Wir konstruieren eine Teilfolge, die gegen a konvergiert. Rekursive Definition: Setze $k_1 = 1$. Sei k_{n-1} schon definiert. Nach (7.9)(2) ist die Menge

$$\left\{ k \in \mathbb{N} \middle|\, a_k \geq a - \frac{1}{n} \right\}$$

unendlich, also existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_n > k_{n-1}$ und $a_{k_n} \geq a - 1/n$. Damit ist die Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (wegen $k_n \geq n$)

$$\sup\{a_k \mid k \geq n\} \geq a_{k_n} \geq a - \frac{1}{n}.$$

Für $n \to \infty$ konvergieren beide Seiten gegen a, woraus $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ folgt. ■

Wir können nun ein weiteres notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge aufstellen.

(7.11) **Satz.** *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn* $\limsup a_n = \liminf a_n$ *ist.*

Das folgt sofort aus (7.2), (7.7), (7.10).

8 Reihen

Unter Verwendung des Grenzwertbegriffes kann man auch für gewisse Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die „unendliche Summe“ $a_1 + a_2 + \ldots$ erklären. Solche unendlichen Reihen sind wichtig, da man spezielle reelle Zahlen oder Funktionen häufig durch Reihen ausdrücken kann.

<u>Definition.</u> Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Man nennt die Zahl

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

die *n-te Partialsumme* dieser Folge. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *unendliche Reihe* und wird mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

bezeichnet. Ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Hiernach bedeutet $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ also zweierlei; das führt erfahrungsgemäß aber nicht zu Mißverständnissen. Nach Definition ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s.$$

Bemerkung. Es ist klar, was unter $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ (mit $m \in \mathbb{Z}$) zu verstehen ist.

Beispiel (unendliche geometrische Reihe): Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Nach (4.16) gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

also

$$\left|\sum_{k=0}^{n} q^k - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{|q|^{n+1}}{1-q} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Folglich ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Konvergenz einer Reihe bedeutet nach Definition nichts anderes als die Konvergenz der zugehörigen Partialsummen-Folge. Die bisher für Folgenkonvergenz gewonnenen Ergebnisse übertragen sich also unmittelbar auf Ergebnisse über Konvergenz von Reihen. Wir wollen diese Resultate im folgenden zusammenstellen. Da es sich nur um Umformulierungen handelt, erübrigt es sich, auf die Beweise einzugehen.

Aus (7.3) und (7.4) folgt:

(8.1) **Satz.** *Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k)$ konvergent, und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Gilt $a_k \le b_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. ■

Aus (7.5) folgt:

(8.2) **Satz.** *Jede Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}$ mit $a_k \ge 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist konvergent oder bestimmt divergent.*

Beispiel. An dieser Stelle können wir die gewohnte Praxis rechtfertigen, reelle Zahlen durch (im Prinzip unendliche) Dezimalbrüche darzustellen. Zum Beispiel bedeutet die Schreibweise

$$\pi = 3,141592653\ldots$$

ja verabredungsgemäß nichts anderes, als daß

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots$$

ist, also daß π durch eine gewisse Reihe mit nichtnegativen Gliedern dargestellt werden kann. Daß die Zahl 10 hier in unserer Kultur eine Sonderrolle spielt, hat keine mathematischen, sondern (vermutlich) biologische Gründe. Allgemeiner sei eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ vorgegeben. Unter einem *b-adischen Bruch* versteht man eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{k=-p}^{\infty} a_k b^{-k} \qquad \text{mit } p \in \mathbb{N}_0,\ a_k \in \mathbb{N}_0,\ a_k < b.$$

Jeder solche b-adische Bruch konvergiert. Zum Beweis genügt es, den Fall $p = 0$ zu betrachten. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b^{-k} < b \sum_{k=0}^{n} b^{-k} < b \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k} = \frac{b^2}{b-1}.$$

Die Konvergenz folgt also aus Satz (8.2), da die Partialsummenfolge beschränkt ist.

Insbesondere stellt also jeder „unendliche Dezimalbruch“ eine reelle Zahl dar. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß umgekehrt jede reelle Zahl als b-adischer Bruch dargestellt werden kann (man bestimme die a_k rekursiv).

Wir fahren fort, Ergebnisse für Folgen auf Reihen umzuformulieren. Ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

so ist für $m < n$

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right|.$$

Aus Satz (7.8) erhalten wir also sofort die folgende wichtige Aussage.

(8.3) **Satz** (Konvergenzkriterium von Cauchy). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$\left| \sum_{k=m}^{m+p} a_k \right| < \epsilon \qquad \text{für } m \geq n_0 \text{ und } p \in \mathbb{N}_0.$$

■

Da die Bedingung insbesondere für $p = 0$ erfüllt sein muß, haben wir:

(8.4) **Satz.** *Notwendig für die Konvergenz der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist die Bedingung* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend.

Beispiel. Die „harmonische Reihe“ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist bestimmt divergent. Es ist nämlich

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

u.s.w., also $s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$, woraus die Behauptung folgt.

Beispiel. Für $\alpha > 1$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent. [Dabei sei $\alpha \in \mathbb{N}$, denn sonst ist bis jetzt k^α noch nicht erklärt. Wenn aber später k^α für $\alpha \in \mathbb{R}$ erklärt sein wird, bleiben Behauptung und Beweis für $\alpha > 1$ richtig.]

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2^{m+1} - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \ldots + \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k^\alpha}\right) \\ &\leq \sum_{r=0}^{m} 2^r \frac{1}{(2^r)^\alpha} = \sum_{r=0}^{m} (2^{1-\alpha})^r < \sum_{r=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^r = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Dabei wurde $2^{1-\alpha} < 1$ (wegen $\alpha > 1$) benutzt. Die Konvergenz folgt jetzt aus Satz (7.2).

In Fällen, wo die Voraussetzung von (7.5) nicht erfüllt ist, ist häufig das folgende Kriterium von Nutzen.

(8.5) **Satz** (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen). *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergent.

Beweis. Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Es gilt $s_{2n+2} - s_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$, also ist die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend. Analog ist die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0$ gilt

$$s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1 \qquad \text{und} \qquad s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0.$$

Nach (7.5) existieren also

$$a := \lim_{n\to\infty} s_{2n} \qquad \text{und} \qquad b := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Es ist $a - b = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, also $a = b$.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_{2n} - a| < \epsilon \qquad \text{für } 2n \geq n_0,$$

und es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_{2n+1} - a| < \epsilon \qquad \text{für } 2n+1 \geq n_1.$$

Für $m \geq \max\{n_0, n_1\}$ gilt also

$$|s_m - a| < \epsilon.$$

Damit ist $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a$ gezeigt. ■

Absolute Konvergenz

Feinere Konvergenzbetrachtungen für Reihen erfordern eine neue Begriffsbildung. Hierauf werden wir beispielshalber bei der folgenden Fragestellung geführt. Gilt für unendliche Reihen auch ein „Kommutativgesetz“? Mit anderen Worten: Hängen Konvergenz und Grenzwert einer Reihe von der Reihenfolge der Summanden ab, oder darf man die Summanden beliebig umordnen? Mit einer „Umordnung“ ist folgendes gemeint:

Definition. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation (bijektive Abbildung auf sich) von $\mathbb{N}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ eine *Umordnung* der ursprünglichen.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert, läßt sich leicht eine Umordnung angeben, die divergiert: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

also

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1}-\frac{1}{2} \\
+ \quad & \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\
+ \quad & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{6} \\
+ \quad & \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{8} \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & \left(\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)-\frac{1}{2n+2} \\
\to \quad & \infty \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Wie sich zeigt, kann etwas derartiges nicht passieren, wenn neben $\sum a_k$ auch die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert.

<u>Definition.</u> Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

(8.6) **Satz.** *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Sei $\sum |a_k|$ konvergent. Wir zeigen, daß $\sum a_k$ die Voraussetzung des Konvergenzkriteriums von Cauchy erfüllt. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m}^{m+p} |a_k| < \epsilon \qquad \text{für } m \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}_0.$$

Für diese m, p gilt also erst recht

$$\left|\sum_{k=m}^{m+p} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{m+p} |a_k| < \epsilon.$$

Nach (8.3) ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. ■

Hier wurde die Ungleichung $|b_1+\ldots+b_n| \leq |b_1|+\ldots+|b_n|$ benutzt, die natürlich aus der Dreiecksungleichung durch Induktion herzuleiten ist.

(8.7) **Satz.** (Umordnungssatz). *Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert a. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe gegen a.*

Beweis. Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation von $\mathbb{N}$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Da $\sum |a_k|$ konvergiert, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \ldots, m\} \subset \{\tau(1), \ldots, \tau(n_0)\}$, so gilt für alle $n \geq n_0$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - a\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - a\right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon.$$

■

Nachdem schon hierdurch (und erst recht im weiteren Verlauf) die Bedeutung von absoluter Konvergenz unterstrichen wird, wollen wir Kriterien für absolute Konvergenz zusammenstellen. Am häufigsten anwendbar ist wohl das folgende:

(8.8) **Satz** (Majorantenkriterium). *Seien $\sum a_k$, $\sum c_k$ Reihen. Gilt*

$$|a_k| \leq c_k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und ist die Reihe $\sum c_k$ konvergent, dann ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\sum c_k$ konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m}^{m+p} c_k < \epsilon \qquad \text{für } m \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}_0.$$

Für diese m, p gilt also

$$\sum_{k=m}^{m+p} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{m+p} c_k < \epsilon.$$

Aus (8.3) folgt die Behauptung. ■

Gilt $|a_k| \leq c_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so nennt man die Reihe $\sum c_k$ eine *Majorante* der Reihe $\sum a_k$. Eine Reihe ist also absolut konvergent, wenn sie eine konvergente Majorante besitzt. Häufig brauchbare Vergleichsreihen sind die geometrische Reihe ($c_k = q^k, q < 1$) und die ζ-Reihen ($c_k = \frac{1}{k^\alpha}$ mit einem $\alpha > 1$).

Gilt dagegen $a_k \geq c_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so nennt man die Reihe $\sum c_k$ eine *Minorante* der Reihe $\sum a_k$. Besitzt die Reihe $\sum a_k$ eine bestimmt divergente Minorante, so ist sie selbst bestimmt divergent. Eine manchmal brauchbare Vergleichsreihe ist die harmonische Reihe.

Wenn sich keines der obigen Kriterien unmittelbar anwenden läßt, versuche man es mit einem der folgenden.

(8.9) **Satz** (Quotientenkriterium). *Sei* $\sum a_k$ *eine Reihe mit* $a_k \neq 0$ *für* $k \in \mathbb{N}$. *Es gebe eine Zahl* $q \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < q < 1$ *und*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Reihe $\sum a_n$ *absolut konvergent.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgert man durch Induktion sofort

$$|a_{n+1}| \leq q^n |a_1|.$$

Da die Reihe $\sum q^n|a_1| = |a_1|\sum q^n$ wegen $|q| < 1$ konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium. ∎

Natürlich genügt es, wenn beim Quotientenkriterium die Voraussetzungen $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für fast alle n erfüllt sind.

Besonders bequem ist das Quotientenkriterium anzuwenden, wenn es gelingt, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: a$ zu bestimmen, falls dieser Grenzwert existiert. Ist $a < 1$, so gilt für beliebiges q mit $a < q < 1$ jedenfalls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ für fast alle n; die Reihe ist also absolut konvergent. Gilt $a > 1$, so gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \qquad \text{für fast alle } n.$$

In diesem Fall ist die Reihe divergent, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Im Fall $a = 1$ kann sowohl absolute Konvergenz als auch Divergenz vorliegen (z.B. $\sum \frac{1}{n^2}$ und $\sum \frac{1}{n}$).

Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$$

Die Formulierung eines weiteren nützlichen Kriteriums erfordert eine Vorbemerkung. Sind Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben, so gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{R}^+$ mit $b^n = a$. Man schreibt dann $b = \sqrt[n]{a}$ und nennt b die *n-te Wurzel* aus a. Sie ist eindeutig bestimmt, denn aus $0 < b < c$ folgt $b^n < c^n$. Die Existenz der n-ten Wurzel könnten wir bereits an dieser Stelle leicht zeigen; wir verzichten aber darauf, da sie sich später in allgemeinerem Rahmen ergibt.

Ferner sei daran erinnert, daß wir in §7 für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Limes superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ definiert hatten. Wir ergänzen diese Definition noch:

Definition. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, so schreibt man

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Man vereinbart noch $\infty > a$ für $a \in \mathbb{R}$.

(8.10) **Satz** (Wurzelkriterium). *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist absolut konvergent, wenn*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ist, und divergent, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

ist.

Beweis. Sei $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} =: a < 1$. Dann gibt es ein $q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ und daher $|a_n| \le q^n$ für fast alle n. Aus dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz der Reihe $\sum a_n$.

Ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so gilt $|a_n| \ge 1$ für unendlich viele n; also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und daher $\sum a_n$ divergent. ■

Bemerkung. Besonders bequem ist die Anwendung des Wurzelkriteriums, wenn $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert und bestimmt werden kann.

Man beachte, daß das Wurzelkriterium im Fall $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ keine Aussage über Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum a_n$ ermöglicht.

Absolute Konvergenz spielt auch eine Rolle, wenn wir versuchen, zwei konvergente Reihen gliedweise zu multiplizieren. Betrachten wir zunächst endliche Summen. Es ist

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_m) = \sum a_i b_j,$$

wo über alle Paare $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$ (in beliebiger Reihenfolge) zu summieren ist. Wenn wir dies auf unendliche Reihen übertragen wollen, müssen wir für die Paare $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ eine Reihenfolge festlegen. Es ist übersichtlich, die Paare (i,j) nach wachsendem $i+j$ anzuordnen (und die mit festem $i+j$ beliebig). Man definiert daher folgendermaßen:

Definition. Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen. Das *Cauchy-Produkt* dieser Reihen ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0.$$

(8.11) **Satz.** *Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist auch ihr Cauchy-Produkt absolut konvergent, und es gilt*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right).$$

Beweis. Setze $\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} =: c_k$. Partialsummen bezeichnen wir mit den entsprechenden großen Buchstaben, also

$$A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

1. Beh.: $\lim_{n\to\infty}(A_n B_n - C_n) = 0$.

Beweis: Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Es ist

$$A_n B_n - C_n = \sum_{\substack{i\le n\\ j\le n}} a_i b_j - \sum_{i+j\le n} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} a_i b_j$$

mit

$$\Gamma_n := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid i \le n,\ j \le n,\ i+j > n\}.$$

Setze

$$D_n := \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\right) = \sum_{\substack{i\le n\\ j\le n}} |a_i b_j|.$$

Nach Voraussetzung und (7.3) ist die Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, also existiert nach (7.8) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|D_n - D_{n_0}| < \epsilon \qquad \text{für } n \ge n_0.$$

Es ist

$$D_n - D_{n_0} = \sum_{(i,j)\in\Delta_n} |a_i b_j|$$

mit

$$\Delta_n := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid i \le n,\ j \le n\} \setminus \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid i \le n_0,\ j \le n_0\}.$$

Für alle $n \ge 2n_0$ gilt $\Gamma_n \subset \Delta_n$ und daher

$$|A_nB_n - C_n| \le \sum_{(i,j)\in\Delta_n} |a_ib_j| \le \sum_{(i,j)\in\Gamma_n} |a_ib_j| = |D_n - D_{n_0}| < \epsilon.$$

Damit ist die 1. Behauptung bewiesen.

Aus der 1. Behauptung folgt nach (7.3)

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right).$$

2. Beh.: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert absolut.

Beweis: Setze $c_k^* := \sum_{j=0}^{k} |a_j||b_{k-j}|$. Da die Reihen $\sum |a_k|$, $\sum |b_k|$ absolut konvergieren, konvergiert nach dem Vorstehenden die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^*$. Es gilt

$$|c_k| \le \sum_{j=0}^{k} |a_jb_{k-j}| = c_k^*.$$

Nach dem Majorantenkriterium ist $\sum c_k$ absolut konvergent. ■

9 Die Exponentialreihe

Als erste Anwendung des Vorstehenden behandeln wir nun die Exponentialreihe. Viele für die Analysis und ihre Anwendungen wichtige reelle Funktionen werden durch unendliche Reihen definiert. Als erstes und besonders wichtiges Beispiel hierfür wollen wir jetzt die Exponentialfunktion einführen. Warum sie zum Beispiel bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge, aber auch in anderen Anwendungsgebieten, oft auftritt, läßt sich allerdings erst gut erklären, wenn wir die Differentiation von Funktionen eingeführt haben. Einen Hinweis gibt aber schon (9.4).

(9.1) **Satz.** *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$