absolut konvergent.

Beweis. Wegen

$$\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \geq 2|x|$$

folgt dies aus dem Quotientenkriterium (8.9). ■

Definition. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ heißt *Exponentialreihe*. Die durch

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Exponentialfunktion*. Man setzt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1) = e \qquad \text{(Eulersche Zahl)}\ .$$

Später werden wir $\exp(x) = e^x$ schreiben, aber zuvor muß gezeigt werden, daß in der Tat $\exp(n) = e^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Will man $\exp(x)$ näherungsweise aus der Exponentialreihe berechnen, so muß man eine „Fehlerabschätzung“ haben.

(9.2) **Satz.** *Wird das „Restglied“ $R_{m+1}(x)$ durch*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + R_{m+1}(x)$$

definiert, so gilt

$$|R_{m+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \qquad \text{für } m \geq 2|x| - 2.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |R_{m+1}(x)| &= \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\ &= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{m+2} + \frac{|x|^2}{(m+2)(m+3)} + \ldots\right) \\ &\leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{m+2} + \left(\frac{|x|}{m+2}\right)^2 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Wird also $\frac{|x|}{m+2} \leq \frac{1}{2}$ vorausgesetzt, so folgt

$$|R_{m+1}(x)| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right) = 2\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$$

■

Wenn also eine Genauigkeitsschranke $\alpha > 0$ vorgeschrieben ist, so kann man aus der Abschätzung in (9.2) zu gegebenem x eine Zahl m errechnen, so daß

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}\right| < \alpha$$

ist. Zum Beispiel berechnet man so (man nehme $m = 14$):

$$e = 2,718281828459 \quad \pm 2 \cdot 10^{-12}.$$

Bemerkung. Für $x = 1$ können wir auch wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} 0 < R_{m+1}(1) &< \frac{1}{(m+1)!}\left(1+\frac{1}{m+1}+\left(\frac{1}{m+1}\right)^2+\dots\right) \\ &= \frac{1}{(m+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m \cdot m!}. \end{aligned}$$

Hieraus können wir folgern, daß die Zahl e irrational ist: Andernfalls wäre nämlich $e = \frac{k}{m}$ mit passenden $k, m \in \mathbb{N}$, also

$$0 < \frac{k}{m} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m \cdot m!},$$

folglich

$$0 < km! - m\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!} < 1,$$

was nicht sein kann, da es sich um eine ganze Zahl handelt.

Wir benutzen jetzt die im vorigen Abschnitt behandelte Multiplikation von Reihen, um die wichtige Funktionalgleichung der Exponentialfunktion herzuleiten.

(9.3) **Satz.** *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$.

Beweis. Da die Reihen $\sum \frac{x^n}{n!}$ und $\sum \frac{y^n}{n!}$ absolut konvergieren, ist das Produkt ihrer Grenzwerte nach (8.11) gleich dem Grenzwert ihres Cauchy-Produktes, also ist

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y),$$

wobei die binomische Formel benutzt wurde. ■

Folgerungen. Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\exp(n) = \exp(1 + \cdots + 1) = \exp(1)\cdots\exp(1) = \exp(1)^n = e^n$$

nach Definition der Zahl e. Aus der Reihendarstellung ergibt sich $\exp(0) = 1 = e^0$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$1 = \exp(0) = \exp(-x + x) = \exp(-x)\exp(x),$$

also

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Von nun an schreiben wir

$$\exp(x) = e^x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R};$$

da wir $\exp(k) = e^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ gezeigt haben, ist das in Einklang mit der bereits festgelegten Bedeutung von e^x für $x \in \mathbb{Z}$. Mit dieser Schreibweise ist also

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Für $x > 0$ ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots > 1.$$

Für $x < 0$ ist $-x > 0$, also $e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0$. Also ist $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x > y$ gilt ferner

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} > 1, \qquad \text{also } e^x > e^y.$$

Die e-Funktion ist also streng monoton wachsend.

Zum Schluß geben wir noch eine Darstellung der Exponentialfunktion durch einen Grenzwert. Sie gibt einen ersten Hinweis auf das Auftreten der Exponentialfunktion in verschiedenen Anwendungen (Interpretation: Kontinuierliche Verzinsung, radioaktiver Zerfall).

(9.4) **Satz.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir setzen $a_n := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (für gegebenes $x \in \mathbb{R}$). Nach der binomischen Formel ist

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k}.$$

Zunächst sei $x \geq 0$. Für $k \geq 1$ gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!},$$

also

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} > e^x - \frac{\epsilon}{2}.$$

Für $n \geq m$ gilt

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert der k-te Summand der rechten Seite gegen $\frac{x^k}{k!}$, also die rechte Seite gegen $\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$. Daher gibt es ein $n_0 \geq m$ mit

$$a_n > \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!} - \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Für alle $n \geq n_0$ gilt also

$$e^x \geq a_n > e^x - \epsilon.$$

Somit gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = e^x$.

Sei nun $x < 0$. Es gilt

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \leq 1.$$

Nach der Bernoullischen Ungleichung ist für $n \geq |x|$

$$\left(1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \geq 1-\frac{x^2}{n},$$

daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

Wegen $-x > 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x},$$

also nach (7.3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

■

Kapitel 4: Topologie in $\mathbb{R}$ und Stetigkeit

10 Topologische Eigenschaften von Mengen reeller Zahlen

Die genauere Untersuchung von reellen Funktionen, wie sie in den folgenden Abschnitten beabsichtigt ist, erfordert zunächst einige Kenntnisse über mögliche Eigenschaften ihrer Definitionsbereiche. Eigenschaften der Art, wie sie hier betrachtet werden sollen, bezeichnet man als „topologische“ Eigenschaften (von griechisch topos = Ort), da es bei ihnen weniger um Größeneigenschaften als um Lage- und gestaltliche Eigenschaften geht. Im folgenden sprechen wir (zur Unterstützung der Anschauung) gerne von „Punktmengen“ anstatt von Zahlenmengen. Gemeint sind aber immer Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Zunächst sei an den Umgebungsbegriff erinnert. Für $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ hatten wir die Menge

$$U_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \epsilon\}$$

als die ϵ-*Umgebung von* x bezeichnet. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *Umgebung von* x, wenn U eine passende ϵ-Umgebung von x enthält. Wir bemerken:

(10.1) **Beh.:** Der Durchschnitt von endlich vielen Umgebungen von x ist Umgebung von x.

Beweis. Seien $U_1, \dots, U_n$ Umgebungen von x. Es gibt also Zahlen $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{R}^+$ mit $U_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Mit $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ gilt $U_\epsilon(x) \subset U_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$ für $i = 1, \dots, n$, also $U_\epsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$, folglich ist $U_1 \cap \dots \cap U_n$ Umgebung von x. ∎

Nun kommen wir zu zwei grundlegenden Eigenschaften, die Mengen reeller Zahlen haben können.

<u>Definition</u>. Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Mit anderen Worten:

$$M \text{ ist offen } \Leftrightarrow \forall x \in M \;\; \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ : U_\epsilon(x) \subset M.$$

<u>Beispiele:</u> offene Intervalle (Beweis trivial), $\emptyset, \mathbb{R}$. Weitere Beispiele ergeben sich aus dem folgenden Satz:

(10.2) **Satz.** *Die Vereinigung von (beliebig vielen) offenen Mengen ist offen. Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

Beweis: trivial bzw. (10.1). ■

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt a *Häufungspunkt* von M, wenn jede Umgebung von a einen von a verschiedenen Punkt von M enthält.

Mit anderen Worten:

$$\begin{aligned} & a \text{ ist Häufungspunkt von } M \\ \Leftrightarrow\ & \text{Für jede Umgebung } U \text{ von } a \text{ gilt } U \cap \big(M \setminus \{a\}\big) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists x \in M : 0 < |x-a| < \epsilon. \end{aligned}$$

Man muß also unterscheiden zwischen einem Häufungspunkt einer Folge und einem Häufungspunkt einer Menge. Nicht jeder Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist notwendig auch Häufungspunkt der Menge $\{a_n | \, n \in \mathbb{N}\}$. (Beispiel: $a_n = (-1)^n$).

Bemerkung. Ist a Häufungspunkt von M, so liegen in jeder Umgebung von a unendlich viele Elemente von M.

Analog zum Satz von Bolzano-Weierstraß können wir folgende Variante herleiten, die ebenfalls als Satz von Bolzano-Weierstraß bezeichnet wird:

(10.3) **Satz** (Bolzano-Weierstraß). *Zu jeder beschränkten unendlichen Menge $M \subset \mathbb{R}$ gibt es in $\mathbb{R}$ einen Häufungspunkt.*

Beweis. Man zeigt dies in offensichtlicher Weise völlig analog zum Beweis von Satz (7.6) durch Intervallhalbierungsverfahren und Intervallschachtelung. ■

Definition. Die Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Beispiele: abgeschlossene Intervalle, $\emptyset, \mathbb{R}$.

Achtung! Eine Menge braucht weder offen noch abgeschlossen zu sein; eine Menge kann sowohl offen als auch abgeschlossen sein.

Es besteht jedoch ein einfacher Zusammenhang zwischen offenen und abgeschlossenen Mengen, siehe (10.4).

<u>Bezeichnung.</u> Ist $M \subset \mathbb{R}$, so nennt man die Menge

$$M^c := \mathbb{R} \setminus M$$

das *Komplement* von M. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt also: $x \in M^c \Leftrightarrow x \notin M$. Es ist $(M^c)^c = M$.

(10.4) **Satz.** *Für $M \subset \mathbb{R}$ gilt:*

$$M \text{ offen } \Leftrightarrow M^c \text{ abgeschlossen.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei M offen. Sei x Häufungspunkt von M^c. Angenommen, es wäre $x \notin M^c$, also $x \in M$. Dann ist M Umgebung von x mit $M \cap M^c = \emptyset$, q.e.a. Also ist $x \in M^c$.

„$\Leftarrow$“: Sei M^c abgeschlossen. Sei $x \in M$. Dann ist $x \notin M^c$, also x nicht Häufungspunkt von M^c. Folglich existiert eine Umgebung U von x mit $U \cap M^c = \emptyset$, also mit $U \subset M$. Da $x \in M$ beliebig war, ist M offen. ■

Für die Komplementbildung gelten die folgenden sogenannten *de Morgan'schen Regeln*, die leicht zu beweisen sind (hier ist $\mathcal{M}$ ein beliebiges System von Mengen):

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c &= \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M^c \\ \left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c &= \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M^c. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man sie, so folgert man aus (10.4) und (10.2):

(10.5) **Satz.** *Der Durchschnitt von (beliebig vielen) abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Unter den abgeschlossenen Mengen sind die beschränkten besonders wichtig, daher haben sie einen besonderen Namen:

<u>Definition.</u> Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

<u>Beispiele:</u> abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ sind kompakt, die Menge $(-\infty, a]$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt, also nicht kompakt.

Aus Satz (10.3) bzw. (7.6) ergibt sich unmittelbar:

(10.6) **Satz.** *Sei $M \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann gilt:*

(a) *Jede unendliche Teilmenge von M besitzt einen Häufungspunkt in M.*

(b) *Jede Folge in M besitzt eine Teilfolge, die gegen ein Element von M konvergiert.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft kompakter Mengen ist die folgende:

(10.7) **Satz.** *Jede nichtleere kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}$ enthält ein Maximum (größtes Element) und ein Minimum (kleinstes Element).*

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{R}$ kompakt, $M \neq \emptyset$. Dann existiert $s := \sup M$. Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $x \in M$ mit $x > s - \epsilon$. Folglich gilt entweder $s \in M$, oder s ist Häufungspunkt von M, also gilt ebenfalls $s \in M$. Somit ist $s = \max M$. Analog schließt man für das Minimum. ■

Eine etwas weniger einfach zu formulierende, aber bei vielen feineren Untersuchungen besonders wichtige Eigenschaft kompakter Mengen bringt der „Überdeckungssatz von Heine-Borel“ zum Ausdruck.

Definition. Ein System (= Menge) $\mathcal{M}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißt *Überdeckung* der Menge $A \subset \mathbb{R}$, wenn $A \subset \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ gilt. $\mathcal{M}$ heißt *offene Überdeckung*, wenn alle Elemente von $\mathcal{M}$ offene Mengen sind.

(10.8) **Satz.** (Überdeckungssatz von Heine-Borel): *Sei $A \subset \mathbb{R}$ kompakt und $\mathcal{M}$ eine offene Überdeckung von A. Dann enthält $\mathcal{M}$ eine endliche Überdeckung von A.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{M}$ von A ohne endliche Teilüberdeckung, d.h. je endlich viele Mengen von $\mathcal{M}$ haben die Eigenschaft, daß ihre Vereinigung nicht ganz A enthält. Wir definieren rekursiv eine Intervallschachtelung $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgender Eigenschaft: $J_n \cap A$ kann nicht durch endlich viele Mengen von $\mathcal{M}$ überdeckt werden. Da A beschränkt ist, existiert ein Intervall $J_1 = [a_1, b_1]$ mit $A \subset J_1$. Sei $J_n = [a_n, b_n]$ schon definiert, so daß obige Eigenschaft besteht. Mindestens eine der Mengen $[a_n, \frac{1}{2}(a_n + b_n)] \cap A$, $[\frac{1}{2}(a_n + b_n), b_n] \cap A$ benötigt zu ihrer Überdeckung unendlich viele Mengen aus $\mathcal{M}$, sei J_{n+1} das erste Intervall mit dieser Eigenschaft. Dann muß J_{n+1} auch unendlich viele Elemente von A enthalten. Damit ist die Folge $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert. Nach (6.3) existiert ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Jede Umgebung von x enthält fast alle J_n, insbesondere unendlich viele Punkte aus A. Also ist x Häufungspunkt von A und daher $x \in A$. Da $\mathcal{M}$ Überdeckung von A ist, existiert ein $M \in \mathcal{M}$ mit $x \in M$. Da M offen ist, existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $U_\epsilon(x) \subset M$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{n_0} - a_{n_0} < \epsilon$. Für alle $y \in J_{n_0}$ gilt dann (wegen $x \in J_{n_0}$)

$|x-y| < \epsilon$, also $y \in U_\epsilon(x)$. Somit ist $J_{n_0} \subset U_\epsilon(x) \subset M$. J_{n_0} wird also sogar durch die eine Menge $M \in \mathcal{M}$ überdeckt, ein Widerspruch. ■

Satz (10.8) gestattet auch eine Umkehrung:

(10.9) **Satz.** *Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft, daß jede offene Überdeckung von A eine endliche Überdeckung von A enthält. Dann ist A kompakt.*

Beweis. Da die Überdeckung $\{U_1(a) | \ a \in A\}$ eine endliche Überdeckung von A enthält, ist A beschränkt. Sei $x \in A^c$. Dann ist das System $\{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $M_n := \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| > \frac{1}{n}\}$ eine offene Überdeckung von A. Es gibt also ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{k} M_n = M_k,$$

folglich mit $U_{\frac{1}{k}}(x) \subset A^c$. Also ist A^c offen und damit A abgeschlossen. ■

11 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Wir betrachten im folgenden reelle Funktionen, worunter wir Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit einem nichtleeren Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ verstehen wollen. Von den Funktionen, die einfache physikalische Vorgänge beschreiben (z.B. „Weg als Funktion der Zeit“ bei der Bewegung eines Massenpunktes) ist man es gewöhnt, daß „kleinen“ Änderungen des Argumentes nur „kleine“ Änderungen der Funktionswerte entsprechen. Der Versuch, diese Vorstellung mathematisch zu präzisieren, führt zur Begriffsbildung der Stetigkeit, die für den weiteren Aufbau der Analysis von grundlegender Bedeutung ist. Zur bequemeren Behandlung dieser Eigenschaft von Funktionen führen wir zunächst einen Grenzwertbegriff für Funktionen ein, der in Analogie zum Grenzwert von Folgen gebildet ist.

<u>Definition.</u> Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion ($D \subset \mathbb{R}$), a ein Häufungspunkt von D und $b \in \mathbb{R}$. Man schreibt

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \qquad (*)$$

wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$|f(x) - b| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{a\} \text{ mit } |x-a| < \delta.$$

Gilt $(*)$, so sagt man, daß $\lim_{x \to a} f(x)$ (der Grenzwert von f für x gegen a) existiert.

Kurz gefaßt lautet die Definition also:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

Bei der Anwendung des Grenzwertbegriffes für Funktionen ist es oft nützlich, daß man die Untersuchung von $\lim_{x\to a} f(x)$ zurückführen kann auf die Untersuchung von Folgen-Grenzwerten:

(11.1) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad (*) \ \text{Für jede Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } D \setminus \{a\} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Gelte $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_{x\to a} f(x) = b$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x) - b| < \epsilon \qquad \text{für alle } x \in D \setminus \{a\} \text{ mit } |x-a| < \delta.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \delta \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Für $n \geq n_0$ gilt also $|f(x_n) - b| < \epsilon$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ gezeigt.

„$\Leftarrow$“: Gelte $(*)$. Angenommen, es wäre *nicht* $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Das bedeutet:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ \ \exists x \in D \setminus \{a\} : (|x-a| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \epsilon).$$

Insbesondere können wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D \setminus \{a\}$ auswählen mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$. Es gibt also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, für die nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ gilt, ein Widerspruch. ∎

Bemerkung. Im letzten Teil des vorstehenden Beweises haben wir Gebrauch gemacht von der folgenden Tatsache:

(A) Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Mengen, so gibt es eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ mit $\alpha(n) \in M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Obwohl wir in dieser Vorlesung die Mengenlehre nur in der sogenannten „naiven“ Weise benutzen, also ohne axiomatische Begründung, sei doch darauf hingewiesen, daß es sich hier um ein Axiom der Mengenlehre handelt (das abzählbare

Auswahlaxiom). Es ist in der elementaren Analysis üblich, dieses Axiom stillschweigend zu benutzen.

Für die Existenz des Grenzwertes einer Funktion haben wir auch ein Cauchy-Kriterium zur Verfügung:

(11.2) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von D. Der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn gilt:*

$$(*) \qquad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x, y \in D \setminus \{a\} : \\ (|x-a| < \delta \text{ und } |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x) - b| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } x \in D \setminus \{a\} \text{ mit } |x-a| < \delta.$$

Für alle $x, y \in D \setminus \{a\}$ mit $|x-a| < \delta,\ |y-a| < \delta$ gilt also

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - b| + |f(y) - b| < \epsilon.$$

$(*)$ ist also erfüllt.

„$\Leftarrow$“: Gelte $(*)$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben; sei δ gemäß $(*)$ gewählt. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \delta$ für $n \ge n_0$. Für $m, n \ge n_0$ gilt also $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$. Somit ist die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und daher nach (7.8) konvergent gegen eine Zahl b. Diese Zahl b hängt (wegen $(*)$) offenbar nicht von der speziellen Folge ab. Aus (11.1) folgt also $\lim_{x\to a} f(x) = b$. ■

Zu dem eingeführten Grenzwertbegriff für Funktionen kann man einige naheliegende Varianten erklären, die manchmal nützlich sind.

<u>Definition.</u> Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Ist a Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, a)$, so schreibt man

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = b$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D : (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

Ist a Häufungspunkt von $D \cap (a, \infty)$, so schreibt man

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = b$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D : (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$