Dann gilt $\sin\varphi = y$ und $\cos\varphi = \cos\alpha = x$, also

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = x + iy = \frac{z}{|z|}.$$

Aus $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ folgt $e^{i(\varphi-\psi)} = 1$, also $\cos(\varphi - \psi) = 1$ und $\sin(\varphi - \psi) = 0$. Ist o.B.d.A. $\varphi \geq \psi$, so folgt aus (15.10) $\varphi - \psi = 0$ oder π, wegen $\cos\pi = -1$ also $\varphi - \psi = 0$. ■

Kapitel 6: Differenzierbare Funktionen

16 Die Ableitung

Ein nützliches allgemeines Prinzip bei der Untersuchung komplizierter Funktionen besteht darin, diese durch einfache, besser bekannte Funktionen zu approximieren (d.h. anzunähern). Der Begriff der Approximation kann auf verschiedene Weisen verstanden werden. Im folgenden interessieren wir uns für Approximation durch affine Funktionen in der Nähe eines festen Punktes. Dieses Verfahren ist heutzutage schon aus dem täglichen Leben geläufig, zum Beispiel wenn man von „Geschwindigkeit“ spricht. Bei einer gleichförmigen Bewegung, das heißt einer solchen, bei der der zurückgelegte Weg proportional zur Zeit ist, versteht man unter der Geschwindigkeit das Verhältnis von Weg zu Zeit. Bei einer nicht gleichförmigen Bewegung kann man nur von einer momentanen Geschwindigkeit reden, und man versteht hierunter die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung, die der betrachteten im gegebenen Zeitpunkt besonders nahe kommt. Daß es eine solche gibt, läuft mathematisch auf die Forderung der Differenzierbarkeit hinaus. Eine Funktion soll im Punkt x differenzierbar heißen, wenn sie in x von erster Ordnung durch eine affine Funktion approximiert werden kann, d.h. genauer:

Definition. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar in* $x \in D$, wenn x Häufungspunkt von D ist und es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ch}{h} = 0.$$

Gibt es eine solche Zahl c, so ist sie eindeutig bestimmt; sie wird mit $f'(x)$ bezeichnet und heißt *Ableitung von f an der Stelle x.*

Die Gleichung $(*)$ ist äquivalent mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c.$$

Damit ist auch die Eindeutigkeit von c klar. Die Ableitung von f an der Stelle x ist also definiert durch

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung. Der letzte Limes ergibt die bekannte geometrische Interpretation der Ableitung als „Steigung“ der „Tangente“ an den Graphen („Limes“ von Sekanten) von f.

Schreibweise. Üblich (aber anfechtbar) ist auch die Schreibweise

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Besser wäre dann schon die Schreibweise

$$f'(x) = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=x}.$$

(16.1) **Satz.** *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar, so ist f in x stetig.*

Beweis. Aus

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x)$$

und $\lim_{y\to x}(y - x) = 0$ folgt $\lim_{y\to x}[f(y) - f(x)] = f'(x) \cdot 0$, also $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. Nach (11.4) ist f stetig in x. ■

Bemerkung. Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt differenzierbar sind.

Definition. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, wenn f in jedem $x \in D$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$, die *Ableitung* von f.

Beispiele.

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$. Wegen

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

ist f differenzierbar und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cx$. Wegen

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c$$

ist f differenzierbar und $f'(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) exp. Es ist

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Nach (9.2) ist

$$|e^h - 1 - h| = |R_2(h)| \le 2\frac{|h|^2}{2!} \quad \text{für } |h| \le \frac{3}{2},$$

also
$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$
und folglich
$$\exp'(x)=\exp(x)\qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}.$$
Die Exponentialfunktion reproduziert sich also bei Differentiation. Dies ist eine Erklärung (von mehreren) für ihr häufiges Auftreten in Anwendungen.

(4) cos. Im Beweis von (15.7) wurde berechnet
$$\cos y-\cos x=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
also ist
$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$
Nun ist $\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})=\sin x$ wegen der Stetigkeit von sin und
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1\qquad \text{nach (15.4)},$$
also
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x.$$
Somit gilt $\cos' x=-\sin x$ für $x\in\mathbb{R}$.

(5) sin. Analog wie in (4) findet man $\sin' x=\cos x$.

(6) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar, denn es ist
$$\lim_{h\searrow 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=1\neq -1=\lim_{h\nearrow 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}.$$
Hier existieren aber einseitige Ableitungen; sie sind naheliegenderweise wie folgt definiert.

<u>Definition.</u> Die Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ heißt *in x von rechts differenzierbar*, wenn
$$f_r'(x):=\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
existiert, und *in x von links differenzierbar*, wenn
$$f_\ell'(x):=\lim_{h\nearrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
existiert.

Die Berechnung der Ableitung von komplizierteren, „zusammengesetzten“ Funktionen wird ermöglicht durch einige allgemeine Sätze, die sich auf die Differentiation von Summen, Produkten, Quotienten, Umkehrfunktionen und Kompositionen differenzierbarer Funktionen beziehen.

(16.2) **Satz.** *Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar in einem Punkt $x \in D$. Dann sind die Funktionen $f+g$, fg, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ in x differenzierbar, und es gilt*

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (\textit{Produktregel}), \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x). \end{aligned}$$

Ist $g(x) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad (\textit{Quotientenregel}).$$

Beweis. Die Behauptung für $f+g$ folgt unmittelbar aus den Definitionen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) + f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Daraus und aus der Stetigkeit von f folgt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Als Spezialfall ergibt sich $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.

Sei $g(x) \neq 0$. Dann ist $g(y) \neq 0$ für alle y aus einer Umgebung von x. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\ &= -\frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}, \end{aligned}$$

woraus

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

folgt. Sodann ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g}(x) + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)\\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

■

Beispiele.

(1) Sei $f(x) = x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

Beh.: $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis: durch Induktion. Für $n = 1$ ist die Beh. richtig. Sei sie bewiesen für n. Sei $f(x) = x^{n+1}$, also $f(x) = x^n \cdot x$ und daher

$$f'(x) = nx^{n-1}\cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

(2) Sei $f(x) = x^{-n}$ für $x \in \mathbb{R}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$. Nach der Quotientenregel und Beispiel (1) folgt

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}.$$

(3) Aus $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ folgt

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Der folgende Satz zeigt, wie man Umkehrfunktionen differenzierbarer Funktionen differenziert.

(16.3) **Satz.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv, in $a \in D$ differenzierbar, und sei $f'(a) \neq 0$. Ist die Umkehrfunktion $\varphi : f(D) \to D$ von f in $b = f(a)$ stetig, so ist φ in b differenzierbar, und es gilt*

$$\varphi'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(\varphi(b))}.$$

Beweis. Setze

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{für } x \in D \setminus \{a\},\\[2ex] f'(a) & \text{für } x = a.\end{cases}$$

Dann ist g an der Stelle a stetig, also ist nach (11.6) und Voraussetzung die Funktion $g \circ \varphi$ an der Stelle b stetig. Somit gilt

$$\lim_{y \to b} (g \circ \varphi)(y) = (g \circ \varphi)(b) = g(\varphi(b)) = g(a) = f'(a) \neq 0$$

und daher

$$\lim_{y \to b} \frac{1}{(g \circ \varphi)(y)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Für $y \in f(D)$ mit $y \neq b$ ist $\varphi(y) \neq a$, also

$$\frac{1}{(g \circ \varphi)(y)} = \frac{1}{\frac{f(\varphi(y)) - f(a)}{\varphi(y) - a}} = \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b},$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Beispiele. In den folgenden Beispielen sind Differenzierbarkeit der Funktion f und Stetigkeit der Umkehrfunktion φ jeweils bereits bekannt. Wir benutzen

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}.$$

(1) ln ist die Umkehrfunktion von exp, und es ist $\exp' x = \exp x \neq 0$, also

$$\ln' x = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

(2) arccos ist die Umkehrfunktion von $\cos|[0, \pi]$. Für $y \in (0, \pi)$ gilt $\cos' y = -\sin y \neq 0$, also für $x \in (-1, 1)$

$$\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}.$$

Setzen wir $\arccos x = y$, so ist $\cos y = x$, also $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$, folglich $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$ ($-\sqrt{1 - x^2}$ kommt nicht in Frage wegen $\sin y > 0$). Es folgt

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

(3) Analog findet man

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

(4) arctan ist die Umkehrfunktion von $\tan|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Für $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\tan' y = \frac{1}{\cos^2 y} \neq 0$, also für $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan' x = \cos^2(\arctan x).$$

Mit $y := \arctan x$ ist $x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} \Rightarrow x^2 \cos^2 y = 1 - \cos^2 y \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$, also

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

(16.4) **Satz** (Kettenregel). *Sei $f : D \to \tilde{D}$ differenzierbar in $a \in D$, sei $g : \tilde{D} \to \mathbb{R}$* differenzierbar in $f(a)$. *Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a, und es gilt*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Beweis. Setze

$$h(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{für } y \in \tilde{D} \setminus \{f(a)\}, \\ g'(f(a)) & \text{für } y = f(a). \end{cases}$$

Dann ist h an der Stelle $f(a)$ stetig, also ist die Funktion $h \circ f$ an der Stelle a stetig. Für $x \in D \setminus \{a\}$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\ &= \begin{cases} \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ falls } f(x) \neq f(a) \\ 0, \text{ falls } f(x) = f(a) \end{cases} \\ &= h(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

Aus $\lim_{x \to a} h(f(x)) = h(f(a)) = g'(f(a))$ und

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

folgt also die Behauptung. ∎

Beispiele.

(1) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ für $x > 0$. Es ist $f(x) = e^{\alpha \ln x} = \exp(g(x))$ mit $g(x) = \alpha \ln x$. Es folgt

$$f'(x) = \exp'(g(x))g'(x) = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(2) $f(x) = \ln \sin x$ für $0 < x < \pi$. Es ist $f'(x) = \ln'(\sin x) \cdot \sin' x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotan} x$.

(3) $f(x) = \cos e^{x^2}$. Es ist

$$f'(x) = -\left(\sin e^{x^2}\right) \cdot e^{x^2} \cdot 2x.$$

(4) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ für $x > 0$. Es ist $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, also

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

17 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Bei differenzierbaren Funktionen steht man oft vor dem Problem, von Eigenschaften der Ableitung auf Eigenschaften der Funktion selbst schließen zu müssen. Zentrales Hilfsmittel hierbei ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit seinen Folgerungen. Der wesentliche Kern dieses Satzes steckt bereits in der folgenden Behauptung.

(17.1) **Satz** (von Rolle). *Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|(a,b)$ differenzierbar und $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Nach (12.2) nimmt f ein Maximum und ein Minimum an. Mindestens eines von beiden, o.B.d.A. ein Maximum, wird an einer Stelle $c \in (a,b)$ angenommen (wegen $f(a) = f(b)$). Es ist

$$f'(c) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

und

$$f'(c) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

also $f'(c) = 0$. ∎

(17.2) **Satz** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|(a, b)$ differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Beweis. Setze

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \text{für } x \in [a, b]$$

und wende (17.1) an. ■

Bemerkung. Wir können das Ergebnis auch etwas anders schreiben: Ist f in $[x - |h|, x + |h|]$ differenzierbar, so gilt

$$f(x + h) = f(x) + f'(x + \vartheta h)h \qquad \text{mit einem } \vartheta \in (0, 1).$$

Wir können also den „Zuwachs“ $f(x+h) - f(x)$ nicht nur näherungsweise durch $f'(x)h$, sondern exakt durch $f'(x + \vartheta h)h$ ausdrücken. Allerdings wissen wir von ϑ nur, daß es in $(0, 1)$ liegt.

Wir kommen zu einigen Folgerungen aus dem Mittelwertsatz. Von Interesse in Anwendungen ist statt der schärferen Aussage des Mittelwertsatzes oft nur die folgende unmittelbare Konsequenz.

(17.3) **Korollar.** *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'(x)| \le c$ für $x \in D$ ($c \in \mathbb{R}$ fest). Dann gilt*

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \le c|x - y| \qquad \text{für } x, y \in D.$$

Bemerkung. Eine Funktion f mit der Eigenschaft $(*)$ nennt man auch „dehnungsbeschränkt“.

Anwendung mit $c = 0$ ergibt:

(17.4) **Satz.** *Sei D ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f konstant.*

Bemerkung. Die Voraussetzung, daß der Definitionsbereich von f ein Intervall ist, ist offenbar wesentlich.

Anwendungsbeispiel.

Beh.: Ist $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) = cf(x) \quad \text{für } x \in [0, b] \quad \text{und } f(0) = a$$

($a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben), so ist

$$f(x) = ae^{cx} \qquad \text{für } x \in [0, b].$$

Beweis. Setze $g(x) := f(x)e^{-cx}$ für $x \in [0, b]$. Dann ist

$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} - f(x)ce^{-cx} = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0$$

für alle $x \in [0, b]$, also ist g konstant, und zwar gleich $g(0) = a$.

(17.5) **Satz.** *Sei D ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann monoton wachsend, wenn $f'(x) \geq 0$ für $x \in D$ gilt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f monoton wachsend. Dann gilt für $x \in D$, $h \neq 0$ und $x + h \in D \setminus \{x\}$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

also $f'(x) \geq 0$.

„$\Leftarrow$“: Nach (18.2) gilt für $x, y \in D$ mit $y > x$

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$$

mit einem geeigneten $c \in (x, y)$. ■

Zusatz. Aus $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$ folgt offenbar, daß f streng monoton wachsend ist (aber nicht umgekehrt).

Wir beweisen noch eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes, die vor allem bei der Ermittlung von Grenzwerten gute Dienste leistet:

(17.6) **Satz** (Zweiter Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $a < b$, seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f|(a, b)$ und $g|(a, b)$ differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Beweis. Setze

$$h(x) := (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a))$$

für $x \in [a, b]$ und wende den Satz von Rolle (17.1) an. ■

Als Anwendung haben wir die folgende, oft nützliche Regel.

(17.7) **Satz** (Regel von de l'Hospital). *Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0,$$

$$g(x) \neq 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \textit{für } x \in (a, b],$$

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis. Wir setzen noch $f(a) = g(a) = 0$; dann sind f und g stetige Funktionen auf $[a, b]$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - c \right| < \epsilon \qquad \text{für } a < y < a + \delta.$$

Sei jetzt $a < x < a + \delta$. Nach (17.6) existiert ein $y \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Es folgt

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| = \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - c \right| < \epsilon.$$

Damit ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

gezeigt. ■

Bemerkung. Die analoge Aussage für $\lim_{x \nearrow a}$ liegt auf der Hand. Aus beiden folgt eine entsprechende Aussage über $\lim_{x \to a}$. Durch eine naheliegende Abwandlung des Beweises zeigt man auch eine entsprechende Aussage für $\lim_{x \to \infty}$ bzw. $\lim_{x \to -\infty}$.

Nützlich ist oft auch die folgende Version der Regel von de l'Hospital, bei der Zähler und Nenner des fraglichen Quotienten nicht gegen 0 konvergieren, sondern bestimmt divergieren.

(17.8) **Satz.** *Seien* $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Es gelte*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty, \ \lim_{x \searrow a} g(x) = \infty,$$

$$g(x) \neq 0, \ g'(x) \neq 0 \quad \textit{für } x \in (a, b],$$

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Dann ist

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nach Voraussetzung existiert ein $d > a$ mit

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - c \right| < \frac{\epsilon}{4} \qquad \text{für } a < y < d.$$

Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit $a + \delta \leq d$, so daß für alle x mit $a < x < a + \delta$ gilt:

$$0 \neq g(x) \neq g(d), \quad 0 \neq f(x) \neq f(d),$$

$$\left| \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}} \right| < 2, \quad |c| \left| \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für alle x mit $a < x < a + \delta$ gilt dann wegen

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - c &= \left(\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} - c \right) \frac{f(x)}{f(x) - f(d)} \frac{g(x) - g(d)}{g(x)} \\ &\quad + c \left(\frac{f(x)}{f(x) - f(d)} \frac{g(x) - g(d)}{g(x)} - 1 \right) \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} - c \right| \underbrace{\left| \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}} \right|}_{< 2} + \underbrace{|c| \left| \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}} - 1 \right|}_{< \frac{\epsilon}{2}}$$

Nach (17.6) existiert ein $y \in (x, d)$ mit

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Es ist also

$$\left| \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} - c \right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Damit ist

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \epsilon$$

gezeigt, woraus die Behauptung folgt. ■

Bemerkung. Analoge Aussagen gelten wieder für $\lim_{x \nearrow a}$ etc.

Beispiele.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

(2) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) =?$ Es ist

$$\frac{x - \sin x}{x \sin x} =: \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit } \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

$$f'(x) = 1 - \cos x, \quad g'(x) = \sin x + x \cos x,$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} g'(x) = 0,$$
$$f''(x) = \sin x, \quad g''(x) = 2 \cos x - x \sin x,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(3) $\lim_{x \searrow 0} x^\alpha \ln x =? \quad (\alpha > 0)$ Es ist

$$-x^\alpha \ln x = \frac{\ln \frac{1}{x}}{x^{-\alpha}} =: \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \searrow 0} g(x) = \infty,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad g'(x) = -\alpha x^{-\alpha - 1},$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{\alpha} x^\alpha, \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \searrow 0} x^\alpha \ln x = 0.$$