Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening 10.01.2005

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 17. Januar, vor der Vorlesung

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heisst konvex, genau dann, wenn aus $x, y \in D$ schon $(1-\lambda)x + \lambda y \in D$ für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine konvexe Menge und seien $x_1, \ldots, x_n \in D$. Zeigen Sie, dass dann auch $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \in D$ gilt.

(b) Sei zusätzlich $f : D \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Dies ist die sogenannte *Jensen'sche Ungleichung*.

(c) Geben Sie mit Hilfe von a) und b) einen neuen Beweis für Aufgabe 3 Blatt 4, d.h. zeigen Sie, dass für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1, \ldots, a_n > 0$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Seien $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ differenzierbar und sei $g := \prod_{i=1}^n f_i$. Sei x_0 ein Extremum von g. Zeigen Sie, dass

$$\frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} + \cdots + \frac{f_n'(x_0)}{f_n(x_0)} = 0$$

gilt. (Tipp: Betrachten Sie $\ln g$.)

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Differenzieren Sie die Funktionen $(x^x)^x$ und $x^{(x^x)}$ auf $(0, \infty)$.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$ durch. (Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und f'. Untersuchen Sie (einseitigen) Grenzwerte von f am Rande des Definitionsbereichs. Bestimmen Sie die Minima und Maxima von f.)