Abteilung für Angewandte Mathematik 17.01.2005
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 12

Abgabe: Montag, den 24. Januar, vor der Vorlesung

Definition: Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $1 \leq p < \infty$. Für eine Regelfunktion $f \in R([a,b])$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{1}$$

Aufgabe 1: **16 Punkte + 4 Sonderpunkte**

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $1 \leq p < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ausdrücke (1) wohldefiniert und endlich sind.

(b) Seien $f, f_n, g, g_n \in R([a,b])$. Zeigen Sie, dass aus $f_n \rightrightarrows f$ und $g_n \rightrightarrows g$ gleichmässig auf $[a,b]$ folgt, dass $f_n g_n \rightrightarrows fg$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

(c) Folgern Sie aus (b), dass aus $f, g \in R([a,b])$ folgt $fg \in R([a,b])$.

(d) Für $1 < p < \infty$ sei q definiert durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz (18.7) aus der Vorlesung (Hölderungleichung für Summen), dass für alle Treppenfunktionen f, g auf $[a,b]$ gilt

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Dies lässt sich auch kürzer als $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ schreiben! Dies ist die sogenannte Hölder-Ungleichung (für Integrale).

(e) Folgern Sie aus (b), (c) und (d), dass $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ auch für alle $f, g \in R([a,b])$ gilt.

(f) [**4 Sonderpunkte**] Sei $1 \leq p \leq \infty$, zeigen Sie, dass für $f, g \in R([a,b])$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Tipp: Der Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ sind einfach. Für $1 < p < \infty$ gilt $|f + g|^p \leq |f|(|f| + |g|)^{p-1} + |g|(|f| + |g|)^{p-1}$. Wenden Sie nun die Hölder-Ungleichung auf die beiden Produkte an.

(g) Folgern Sie aus (a)-(f), dass $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $C([a,b])$ sind.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Berechnen Sie die Taylorreihe von $\ln(1 + x)$ an der Entwicklungsstelle 0.