Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

31.01.2005

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 14

Abgabe: Montag, den 7. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 11 Punkte

(a) Begründen Sie mit Hilfe des Cauchykriteriums, wieso das folgende uneigentliche Integral existiert:

$$J := \int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx.$$

(b) Berechnen Sie die das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Tipp: Substituieren und $\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = [\arctan y]$.

(c) Berechnen Sie J. Tipp: Partialbruchzerlegung mit Ansatz

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Aufgabe 2: 4 Punkte + 4 Sonderpunkte

(a) Seien $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ derart, dass f und g auf allen kompakten Intervallen Regelfunktionen sind und $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = c_0 \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Integrale

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \qquad\qquad \int_0^\infty g(x)\,dx$$

entweder beide konvergieren oder beide nicht konvergieren.

(b) [**4 Sonderpunkte**] Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil (a) auch gilt, wenn der Bildbereich von f und g durch $\mathbb{R}$ ausgetauscht wird.

Aufgabe 3: 5 Punkte

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergent?