Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

03.11.2004

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 3

Abgabe: Montag, den 8. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c, d \neq 0$. Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome die folgenden Aussagen:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}, \qquad \frac{a}{c}\,\frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome und vollständiger Induktion, dass für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(b^{-1}\right)^n = \left(b^n\right)^{-1}.$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte, nicht leere Menge. Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ existiert mit $(\sup M) - \varepsilon < x$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Aussage:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$