Abteilung für Angewandte Mathematik 08.11.2004
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 15. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Beweisen Sie (4.14) und (4.15) aus dem Skript, d.h. zeigen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} \;:\; n\, m \in \mathbb{N}, \tag{4.14}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} \;:\; (m > n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N}). \tag{4.15}$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Bestimmen Sie $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1, \dots, a_n > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

(a) Gegeben seien die folgenden Funktionen:

   (a) $f_1 \;:\; \mathbb{R} \to [0, \infty) \;:\; x \mapsto x^2$,
   (b) $f_2 \;:\; [0, \infty) \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto \sqrt{x}$.

   Überprüfen Sie, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.

(b) Schränken Sie den Definitions- und Bildbereich von f_1 und f_2 sinnvoll so ein, dass die Funktionen bijektiv werden. Geben Sie die Umkehrfunktionen samt Definitions- und Wertebereich an.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Seien M_1, M_2, M_3 Mengen und seien $f \;:\; M_1 \to M_2$, $g \;:\; M_2 \to M_3$ Funktionen. Beweisen Sie:

(a) Sei $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.

(b) Sei $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, dann ist f surjektiv.