Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

15.11.2004

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 22. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ gilt.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$\begin{aligned} a_n &:= \sqrt{n}\big(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\big), \\ b_n &:= \frac{n^3 + 10\,n^2}{2n^3 + 13n}, \\ c_n &:= \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}\,, \\ d_n &:= \frac{n!}{10^n}, \\ e_n &:= \prod_{k=2}^{n} \big(1 - \tfrac{1}{k^2}\big). \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $m \geq 1$. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}} \big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\,\big).$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

(a) Sei $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$. Untersuchen Sie, für welche a_1 die Folge (a_n) konvergiert. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(b) Sei $b_1 := 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $b_{n+1} := \sqrt{2 + b_n}$. Untersuchen Sie, ob die Folge (b_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Seien $x_1, y_1 > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_{n+1} := \sqrt{x_n\, y_n}$ und $y_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}$. Zeigen Sie, dass die Folgen (x_n) und (y_n) konvergieren und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.