

**Analysis I**

WS 2004/05 — Woche 6

**Abgabe: Montag, den 29. November, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 1:**

**8 Punkte**

(a) Seien  $(a_n), (b_n)$  reelle Folgen. Zeigen Sie

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad (1)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad (2)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \quad (3)$$

(b) Sei  $(b_n)$  zusätzlich konvergent. Zeigen Sie

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(c) Gegen Sie ein Beispiel an, so dass in (2) nicht die Gleichheit gilt.

**Aufgabe 2:**

**12 Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 4n + 10},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2},$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ fest.}$$