Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

29.11.2004

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 6. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Beweisen Sie das endliche Durchschnittsprinzip, d.h. zeigen Sie:
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn jedes *zentrierte System* von in K abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Ein System $A_i, i \in I$, heißt *zentriert*, wenn der Durchschnitt beliebiger endlicher Teilsysteme $A_{i_k}, k = 1, \ldots, N$, nichtleer ist.
Tipp: Benutzen Sie den Überdeckungssatz von Heine-Borel.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei (a_n) eine reelle, monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die „kondensierte Reihe“ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

(a) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie zusätzlich, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt. Dies verallgemeinert Augabe 5 aus Woche 3.

Aufgabe 5: **6 Punkte**

Für $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir den *Abschluss* $\overline{A}$ von A durch

$$\overline{A} := A \cup \{\text{Häufungspunkte von A}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{A} = A$ genau dann gilt, wenn A abgeschlossen ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. aus $B \subset \mathbb{R}$ mit $A \subset B$ und B abgeschlossen, folgt $\overline{A} \subset B$.

(d) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ gleich dem Durchschnitt aller abgeschlossener Obermengen von A ist, d.h.

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{B\,:\,A\subset B\subset\mathbb{R} \\ B \text{ abgeschlossen}}} B.$$