Abteilung für Angewandte Mathematik 13.12.2004
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis I

WS 2004/05 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 20. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to\infty} \sin(x^2), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a)}{x}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei (a_n) eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch (b_n) mit $b_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j$ eine Nullfolge ist.
Tipp: Betrachten Sie für großes k die Teilsummen $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^k a_j$ und $\frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^n a_j$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Untersuchen Sie, an welchen Stellen die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig sind:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \neq 2, \\ 4 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeigen Sie, dass dann f^{-1} stetig ist.
Tipp: Seien $y_n, y \in \operatorname{Bild}(f)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dann muss gezeigt werden, dass $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen $x := f^{-1}(y)$ konvergiert. Beweisen Sie dies durch Widerspruch.