Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Geben Sie eine Definition des Begriffs „Metrik“ und des Begriffs „Differential für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$“ an.

Aufgabe 2 **(2 Punkte)**

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen wieder offen ist.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \tfrac{1}{2} \arctan x + \tfrac{1}{4}\, x + 1.$$

Zeigen Sie, dass f einen eindeutigen Fixpunkt hat.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Überprüfen und begründen Sie, welche der folgenden Mengen M_1 und M_2 kompakt sind.

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{ \tfrac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ als Teilmenge von } \mathbb{R}, \\ M_2 &:= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1, z = 4x \right\} \text{ als Teilmenge von } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Überprüfen und begründen Sie, welche dieser Mengen $M_1, M_2 \subset C(X)$ gleichgradig stetig sind:

$$\begin{aligned} X = [0, 1], \quad M_1 &:= \left\{ t \mapsto \sin(n\, t) \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \\ X = [0, 1], \quad M_2 &:= \left\{ t \mapsto t + n \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned}$$

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie eine maximale Lösung der Differentialgleichung

$$y' = 1 + y^2$$

zum Anfangswert $(t_0, y_0) = (1, 0)$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

Aufgabe 7 **(5 Punkte)**

Sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix von $Y' = \mathbf{A}\, Y$. Geben Sie eine Lösung zum Startwert $Y(0) = (-1, 1)^T$ an.

Aufgabe 8 **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie die Taylorformel um $(1,1)$ bis einschließlich der Terme zweiten Grades von

$$g(x,y) = \exp(y-x).$$

Aufgabe 9 **(2 Punkte)**

Bestimmen Sie die kritischen Punkte von

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - x^2\,y^2.$$

Aufgabe 10 **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := x^2 + y^2 + y$$

und sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Bestimmen Sie die Maxima und Minima in Inneren von B.

(b) Bestimmen Sie die Maxima und Minima auf dem Rand von B.

(c) Bestimmen Sie die globalen Maxima und Minima von f auf ganz B.

Aufgabe 11 **(2 Punkte)**

Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei orthogonale Vektoren. Beweisen Sie den Satz von Pythagoras:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Aufgabe 12 **(3 Punkte)**

Sei (M,d) ein metrischer Raum und seien $A, B \subset M$ nichtleer und kompakt. Durch

$$\hat{d}(A,B) := \inf\{d(a,b) \,:\, a \in A, b \in B\}$$

definieren wir den *minimalen Abstand* von A zu B. Zeigen Sie, dass es Punkte $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ gibt mit $d(a_0,b_0) = \hat{d}(A,B)$, d. h. der minimale Abstand wird tatsächlich angenommen.

Aufgabe 13 **(4 Punkte)**

Seien

$$f(a,b) = \int_0^a \arctan(b+t)\,dt, \quad a(x) = x^2, \quad b(x) = 3\,x.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $g(x) := f(a(x), b(x))$ nach x.