Kapitel 2: Der euklidische Raum

6 Der n-dimensionale euklidische Vektorraum

Unser Arbeitsgebiet in den folgenden Kapiteln wird der n-dimensionale euklidische Raum sein. Diese Begriffsbildung ist aus der Linearen Algebra bekannt, und überhaupt werden Methoden der Linearen Algebra in diesem zweiten Teil der Analysis viel stärker benutzt als im ersten Teil. Wir wollen zunächst an einige Definitionen aus der Vorlesung Lineare Algebra I erinnern und einige für unsere Zwecke praktische Bezeichnungen festlegen. Sodann werden wir sehen, daß der euklidische Raum gegenüber den in Kapitel 1 betrachteten allgemeinen metrischen Räumen noch einige sehr spezielle metrische Eigenschaften hat. Da er zugleich ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, ergeben sich aus der Wechselwirkung zwischen Metrik und Vektorraumstruktur zusätzliche Aussagen, die später ständig benutzt werden.

Im folgenden ist n eine natürliche Zahl. Unter dem n-dimensionalen euklidischen Raum werden wir einen reellen Vektorraum der Dimension n mit einem (positiv definiten) Skalarprodukt verstehen. Bekanntlich sind je zwei n-dimensionale reelle Vektorräume isomorph; wir können daher von *dem* n-dimensionalen reellen Vektorraum sprechen und den weiteren Betrachtungen einen bestimmten zugrundelegen. Hierfür wählen wir das n-fache kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}},$$

also die Menge aller geordneten n-Tupel reeller Zahlen, zusammen mit den durch

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &:= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) &:= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

definierten Vektorraumoperationen. Den Nullvektor $(0, \ldots, 0)$ von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir auch mit 0 (also – wie üblich – mit demselben Symbol wie die reelle Zahl 0). Durch

$$E_1 := (1, 0, \ldots, 0), \quad E_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad E_n := (0, \ldots, 0, 1)$$

ist eine Basis $(E_1, \ldots, E_n)$ von $\mathbb{R}^n$ gegeben; wir nennen sie die *Standardbasis* von $\mathbb{R}^n$. Für $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$X = x_1 E_1 + \ldots + x_n E_n,$$

also x_i die i-te Koordinate des Vektors X bezüglich der Standardbasis; wir nennen x_i kurz die *i-te Koordinate* von X. Die Abbildung

$$\begin{aligned} p_i \;: \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

die also jedem Vektor seine i-te Koordinate zuordnet, heißt i-te *Projektion* ($i = 1, \ldots, n$).

HINWEIS. In der Sprechweise machen wir keinen Unterschied zwischen „Punkten“ und „Vektoren“. Beides bedeutet hier also dasselbe, nämlich Elemente von $\mathbb{R}^n$. Wir verwenden beide Ausdrücke und sprechen von „Punkten“ meist dann, wenn die Vektorraumstruktur keine Rolle spielt.

Um auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ Analysis betreiben zu können, brauchen wir (zum Beispiel) eine Metrik. Sie sollte mit der Vektorraumstruktur gekoppelt sein. Wir führen sie daher ein durch eine spezielle Norm, die durch ein Skalarprodukt induziert ist. An diese Begriffsbildungen soll zunächst in allgemeinerem Rahmen erinnert werden.

(6.1) **Definition.** Ein *Skalarpodukt* auf dem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcccc} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto & \langle u,v\rangle \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle + \mu\langle v,w\rangle$, $\langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u,v\rangle + \mu\langle u,w\rangle$,

(b) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$,

(c) $\langle u,u\rangle > 0$, falls $u \neq 0$

für alle $u, v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V, so wird das Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ als *euklidischer Vektorraum* bezeichnet.

Sind $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $(V', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ zwei n-dimensionale reelle Vektorräume mit Skalarprodukt, so gibt es, wie man in der Linearen Algebra zeigt, einen Vektorraumisomorphismus $f : V \to V'$ mit $\langle f(u), f(v)\rangle' = \langle u,v\rangle$ für alle $u, v \in V$. In diesem Sinne sind also je zwei euklidische Vektorräume gleicher (endlicher) Dimension isomorph. Alle Skalarprodukte auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum sind also im wesentlichen gleichwertig, und wir können insbesondere bei der Behandlung von $\mathbb{R}^n$ ein spezielles wählen.

(6.2) **Definition und Behauptung.** Für $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\langle X, Y\rangle := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$; es heißt das *Standard-Skalarprodukt.*

Daß in der Tat ein Skalarprodukt definiert wird, ist klar. Wir werden es den späteren Betrachtungen zugrundelegen. Unter dem *n-dimensionalen euklidischen*

Vektorraum wird dann immer $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt verstanden. Zunächst schließen sich aber an die Definition des Skalarprodukts noch einige Begriffsbildungen und Hilfssätze an, die wir ohne Mehraufwand im allgemeineren Rahmen behandeln können.

(6.3) **Satz.** *Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum V, so gilt für alle $u, v \in V$*

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$$

(*Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*) *und*

$$\sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} \leq \sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

(*Minkowskische Ungleichung*).

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gilt nach (6.1)

$$\langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle = \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle \geq 0.$$

Ist $\langle v, v\rangle \neq 0$, so kann man

$$\lambda := -\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

einsetzen und erhält die erste Ungleichung. Ist $\langle v, v\rangle = 0$, so ist $v = 0$ und daher $\langle u, v\rangle = 0$; die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt also trivialerweise. Die Minkowskische Ungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarzschen:

$$\begin{aligned}\langle u+v, u+v\rangle &= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ &\leq \langle u, u\rangle + 2\sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle} + \langle v, v\rangle \\ &= \left(\sqrt{\langle u, u\rangle} + \sqrt{\langle v, v\rangle}\right)^2.\end{aligned}$$

■

(6.4) **Definition und Behauptung.** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann wird durch

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle} \qquad \text{für } u \in V$$

auf V eine Norm erklärt. Sie heißt die durch das Skalarprodukt *induzierte* Norm.

Beweis. (Zum Begriff der Norm siehe §1, Beispiele.) Nach (6.1) ist $\langle u, u\rangle \geq 0$, also ist $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ als reelle Zahl definiert. Daß die Axiome für eine Norm erfüllt sind, folgt aus (6.1) und der Minkowskischen Ungleichung, die gerade die Dreiecksungleichung für die induzierte Norm ist. ■

Gemäß §1 (Beispiele) wird damit jetzt durch

$$d(u,v) := \|u-v\| \qquad \text{für } u,v \in V$$

auf V auch eine Metrik d gegeben. Im Falle des n-dimensionalen euklidischen Vektorraums ist

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

für $X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen diese Zahl als den *euklidischen Abstand* der Punkte X, Y und d auch als die *euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$.

Mit Hilfe des Skalarprodukts lassen sich weitere, anschaulich vertraute geometrische Grundbegriffe erklären:

(6.5) **Definition.** Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Die Vektoren $u,v\in V$ heißen *orthogonal* (oder *senkrecht*), wenn $\langle u,v\rangle = 0$ ist. Für $u,v\in V\setminus\{0\}$ wird die durch

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \cos\varphi, \qquad 0\le\varphi\le\pi,$$

definierte reelle Zahl φ als der *Winkel* zwischen u und v bezeichnet.

Daß φ existiert, ist klar wegen

$$|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|,$$

was gerade die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in neuer Schreibweise ist. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus der strengen Monotonie von cos auf $[0,\pi]$.

Bemerkung. Für orthogonale $u,v\in V$ gilt der „Satz des Pythagoras“:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2.$$

Wegen $\langle u,v\rangle=0$ folgt das aus

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2+\|v\|^2.$$

Eine Basis eines euklidischen Vektorraumes, deren Elemente paarweise orthogonal und von der Norm 1 sind, heißt *orthonormiert*. Die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist also orthonormiert (bezüglich des Standard-Skalarprodukts).

Von nun an legen wir speziell den n-dimensionalen euklidischen Raum zugrunde, also $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, der daraus abgeleiteten Norm $\|\cdot\|$

und der hierdurch induzierten Metrik. Der euklidische Abstand zweier Punkte $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ist durch $\|X - Y\|$ gegeben. Auf diesen metrischen Raum können wir nun alles anwenden, was wir in Kapitel 1 definiert und bewiesen haben. Durch die Koppelung der Metrik mit der Struktur eines endlichdimensionalen Vektorraumes ergeben sich einige Besonderheiten und Vereinfachungen, die wir jetzt zusammenstellen wollen.

(6.6) **Definition und Behauptung.** Für $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\|X\|_{\max} := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Dann ist $\|\cdot\|_{\max}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, und es gilt

$$\|X\|_{\max} \leq \|X\| \leq \sqrt{n}\|X\|_{\max}.$$

Der Beweis ist trivial.

Diese einfachen Ungleichungen sind ein bequemes Hilfsmittel, um Aussagen über $\mathbb{R}^n$ auf dem Weg über die Koordinaten auf Aussagen über $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Die folgenden Sätze werden dies demonstrieren.

(6.7) **Satz.** *Die Menge $\mathbb{Q}^n$ der Punkte mit rationalen Koordinaten ist dicht in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Sei $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl $y_i \in \mathbb{Q}$ mit

$$|x_i - y_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.$$

Dann ist $Y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$, und nach (6.6) ist

$$\|X - Y\| \leq \sqrt{n}\|X - Y\|_{\max} < \epsilon.$$

In jeder Umgebung eines beliebigen Punktes von $\mathbb{R}^n$ liegen also Punkte aus $\mathbb{Q}^n$. ■

Der folgende Satz führt die Konvergenz von Punktfolgen im $\mathbb{R}^n$ auf die Konvergenz der Koordinatenfolgen zurück; wir werden ihn häufig zu benutzen haben.

(6.8) **Satz.** *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, sei $X_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ für $k \in \mathbb{N}$, sei $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Ferner gilt

$$(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge} \quad \Leftrightarrow \quad (x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge}$$
$$\text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Gelte $\lim_{k\to\infty} X_k = X$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|X - X_k\| < \epsilon$ für $k \geq k_0$. Für alle $k \geq k_0$ gilt also

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \|X - X_k\|_{\max} \leq \|X - X_k\| < \epsilon.$$

Damit ist $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ gezeigt.

Gelte $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es ein $k_i \in \mathbb{N}$ mit $|x_i - x_i^{(k)}| < \epsilon/\sqrt{n}$ für $k \geq k_i$. Für $k \geq k_0 := \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ gilt dann

$$\|X - X_k\| \leq \sqrt{n}\|X - X_k\|_{\max} < \epsilon.$$

Damit ist $\lim_{k\to\infty} X_k = X$ gezeigt.

Die zweite Äquivalenz zeigt man völlig analog. ■

Als Anwendung kann man zeigen, daß die Vektorraumoperationen und das Skalarprodukt stetig sind. Wegen Satz (4.3) ist das äquivalent mit den folgenden Aussagen.

(6.9) **Satz.** *Für konvergente Folgen* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *und* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}(X_k + Y_k) &= \lim_{k\to\infty} X_k + \lim_{k\to\infty} Y_k, \\
\lim_{k\to\infty} \lambda_k X_k &= \left(\lim_{k\to\infty} \lambda_k\right)\left(\lim_{k\to\infty} X_k\right), \\
\lim_{k\to\infty}\langle X_k, Y_k\rangle &= \left\langle \lim_{k\to\infty} X_k, \lim_{k\to\infty} Y_k\right\rangle.
\end{aligned}$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus (6.8) und bekannten Aussagen über konvergente Folgen reeller Zahlen. Aus dem zweiten Teil von (6.8) erhält man die folgende Aussage.

(6.10) **Satz.** $\mathbb{R}^n$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $X_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ nach (6.8) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ also konvergent gegen eine Zahl $x_i \in \mathbb{R}$. Mit $X := (x_1, \ldots, x_n)$ gilt $\lim_{k\to\infty} X_k = X$ nach (6.8). ■

Ebenso wichtig wie die durch (6.10) ausgedrückte Tatsache, daß in $\mathbb{R}^n$ das Cauchysche Konvergenzkriterium gilt, ist die Tatsache, daß der Satz von Bolzano-Weierstraß sich auf den $\mathbb{R}^n$ übertragen läßt.

(6.11) **Satz** (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $X_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$. Wegen (6.6) ist die Folge $(x_1^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt; sie besitzt also nach dem in $\mathbb{R}$ gültigen Satz von Bolzano-Weierstraß eine gegen eine Zahl $x_1 \in \mathbb{R}$ konvergierende Teilfolge $(x_1^{(k_j)})_{j\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(x_2^{(k_j)})_{j\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls beschränkt, sie besitzt also eine gegen ein $x_2 \in \mathbb{R}$ konvergierende Teilfolge. So weiter schließend, erhält man nach endlich vielen Schritten eine streng monotone Folge $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ und Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{j\to\infty} x_i^{(m_j)} = x_i \qquad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Mit $X := (x_1, \dots, x_n)$ gilt also nach (6.8)

$$\lim_{j\to\infty} X_{m_j} = X. \qquad \blacksquare$$

Hieraus können wir zum Beispiel eine Verallgemeinerung des aus Analysis I bekannten Intervallschachtelungsprinzips herleiten.

(6.12) **Satz.** *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter, nichtleerer Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \neq \emptyset$.*

Beweis. Da $A_i \neq \emptyset$ ist, können wir ein $X_i \in A_i$ auswählen ($i \in \mathbb{N}$). Die Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist (wegen $X_i \in A_1$ und der Voraussetzung) beschränkt, besitzt also nach (6.11) eine konvergente Teilfolge $(X_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei X ihr Limes. Sei $i \in \mathbb{N}$. Wegen $X_{i_k} \in A_{i_k} \subset A_i$ für $i_k \geq i$ ist X Berührpunkt von A_i; also ist $X \in A_i$. $\blacksquare$

Nun können wir auch zeigen, daß in $\mathbb{R}^n$ der Überdeckungssatz von Heine-Borel gilt:

(6.13) **Satz.** *In $\mathbb{R}^n$ ist jede abgeschlossene, beschränkte Menge kompakt.*

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Satz (10.8) in Analysis I; dabei sind lediglich Intervalle $[a_i, b_i]$ zu ersetzen durch Würfel $[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}] \times \dots \times [a_i^{(n)}, b_i^{(n)}]$. $\blacksquare$

Nach diesen wichtigen Beispielen für die Übertragbarkeit von Sätzen von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^n$ kann man sich fragen, welche Rolle dabei die spezielle Wahl der euklidischen

Norm $\|\cdot\|$ spielt. Die Antwort lautet, daß man ebenso gut eine beliebige andere Norm hätte wählen können. Dies liegt daran, daß zwei beliebige Normen auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind in folgendem Sinne.

(6.14) **Satz.** *Sind* $\|\cdot\|_1$ *und* $\|\cdot\|_2$ *zwei Normen auf* $\mathbb{R}^n$, *so gibt es Zahlen* $k, K \in \mathbb{R}^+$ *mit*

$$k\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq K\|X\|_1 \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Es genügt, die Ungleichungen für eine spezielle Norm $\|\cdot\|_1$ zu beweisen; das allgemeine Resultat folgt dann nämlich durch mehrmalige Anwendung des spezielleren. Wir wählen hierzu die Norm $\|\cdot\|_{\max}$ aus (6.6).

Sei $(E_1, \ldots, E_n)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und

$$K := \|E_1\|_2 + \ldots + \|E_n\|_2.$$

Für $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|X\|_2 &= \|x_1E_1 + \ldots + x_nE_n\|_2 \\ &\leq |x_1|\|E_1\|_2 + \ldots + |x_n|\|E_n\|_2 \\ &\leq K\|X\|_{\max}. \end{aligned}$$

Damit ist schon die Existenz von K gezeigt.

Wir setzen nun $f(X) := \|X\|_2$ für $X \in \mathbb{R}^n$ und zeigen die Stetigkeit der Funktion f. Für $X, Y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |\|X\|_2 - \|Y\|_2| &\leq \|X - Y\|_2 && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq K\|X - Y\|_{\max} \\ &\leq K\|X - Y\| && \text{(nach (6.6))}. \end{aligned}$$

Also ist f stetig. Nun ist die Menge

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\|_{\max} = 1\}$$

beschränkt (denn für $X \in A$ ist $d(X, 0) = \|X\| \leq \sqrt{n}\|X\|_{\max} = \sqrt{n}$) und abgeschlossen (denn aus $X_i \in A$ und $X_i \to X$ folgt $1 = \|X_i\|_{\max} \to \|X\|_{\max}$ nach (2.5), also $\|X\|_{\max} = 1$). Nach (6.13) ist A kompakt. Nach (5.5) nimmt f auf A ein Minimum $k \geq 0$ an. Wäre $k = 0$, so gäbe es ein $X \in A$ mit $\|X\|_2 = 0$, also $X = 0$, ein Widerspruch. Also ist $k > 0$. Wir haben also $\|X\|_2 \geq k > 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^n$ mit $\|X\|_{\max} = 1$. Für beliebiges $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt dann mit $\lambda := 1/\|X\|_{\max}$ die Gleichung $\|\lambda X\|_{\max} = 1$, also $|\lambda|\|X\|_2 = \|\lambda X\|_2 \geq k$, folglich $\|X\|_2 \geq k\|X\|_{\max}$. Für $X = 0$ gilt diese Ungleichung trivialerweise. Damit ist auch die Existenz von k gezeigt. ∎

7 Abbildungen und Koordinatenfunktionen

Abbildungen zwischen euklidischen Räumen treten in der höherdimensionalen Analysis in verschiedenster Form auf. In diesem Abschnitt sollen einige grundlegende Erläuterungen zu allgemeinen Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gegeben werden. Wir betrachten zunächst lineare Abbildungen und wiederholen einige einschlägige Begriffe aus der Linearen Algebra.

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ heißt bekanntlich *linear*, wenn

$$F(\lambda X + \mu Y) = \lambda F(X) + \mu F(Y)$$

für alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt. Lineare Abbildungen lassen sich durch Matrizen beschreiben. Wie vereinbart, wollen wir dabei immer die Standardbasen zugrundelegen. Sei also $(E_1, \ldots, E_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $(E'_1, \ldots, E'_k)$ diejenige von $\mathbb{R}^k$. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ist der Vektor $F(E_j)$ eindeutig linear kombinierbar aus den Vektoren $E'_1, \ldots, E'_k$, also gilt

$$F(E_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

mit reellen Zahlen a_{ij}. Durch die $k \times n$-Matrix

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

ist umgekehrt die Abbildung F festgelegt, denn für $X = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j \in \mathbb{R}^n$ ist

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j F(E_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} E'_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) E'_i.$$

Die i-te Koordinate des Bildvektors ist also gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Die linearen Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ bilden in bekannter Weise einen reellen Vektorraum. Es ist zweckmäßig, hierauf eine Norm einzuführen. Wir nehmen dazu die euklidische Norm des (beliebig geordneten) (kn)-Tupels der Matrixeinträge, durch die F bezüglich der Standardbasen beschrieben wird.

(7.1) **Definition und Behauptung.** Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung. Setze

$$\|F\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

wobei $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}}$ die der Abbildung F wie oben zugeordnete Matrix ist. Dann gilt

$$\|F(X)\| \leq \|F\|\|X\| \qquad \text{für alle } X \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis. Man beachte, daß hier ungenauerweise dasselbe Symbol $\|\cdot\|$ für drei verschiedene Funktionen benutzt wird: $\|F(X)\|$ ist die Norm von $F(X)$ in $\mathbb{R}^k$, $\|X\|$ ist die Norm von X in $\mathbb{R}^n$, und $\|F\|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^k$. Da aber keine Gefahr von Mißverständnissen besteht, ist diese unpräzise Bezeichnungsweise durchaus üblich.

Beweis von (7.1). Für $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$F(X) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) E_i',$$

also

$$\|F(X)\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2.$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (in einem beliebigen $\mathbb{R}^m$) $\langle A, B \rangle^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2$ ist

$$\left(\sum a_j b_j \right)^2 \leq \left(\sum a_j^2 \right) \left(\sum b_j^2 \right),$$

also

$$\|F(X)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) = \|F\|^2 \|X\|^2. \qquad \blacksquare$$

(7.2) **Korollar.** *Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ eine lineare Abbildung, so ist*

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq \|F\|\|X - Y\| \qquad \text{für } X, Y \in \mathbb{R}^n,$$

also ist F eine Lipschitzabbildung (mit Lipschitz-Konstante $\|F\|$) und somit insbesondere gleichmäßig stetig.

Nun betrachten wir Abbildungen in euklidische Räume, die nicht notwendig linear sind. Der Definitionsbereich darf dann zunächst auch von allgemeinerer Natur sein. Sei zunächst M eine beliebige nichtleere Menge und $F : M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Für jedes $x \in M$ können wir dann den Bildvektor $F(x)$ als Linearkombination der Basisvektoren $E_1, \ldots, E_n$ des $\mathbb{R}^n$ darstellen. Bezeichnen wir die i-te Koordinate von $F(x)$ mit $f_i(x)$, so gilt also

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) E_i \qquad \text{für } x \in M.$$

Dadurch sind reellwertige Funktionen $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, definiert. Wir bezeichnen f_i als die i-te *Koordinatenfunktion* der Abbildung F. Sie kann auch als Komposition

$$f_i = p_i \circ F$$

dargestellt werden; dabei ist

$$\begin{array}{rccl} p_i : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

die i-te Projektion. Allgemein läßt sich also die Untersuchung einer Abbildung in den $\mathbb{R}^n$ zurückführen auf die Untersuchung von n reellwertigen Funktionen, was oft bequem ist. Hierfür ein erstes Beispiel:

(7.3) **Satz.** *Sei M ein metrischer Raum, $F : M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $x \in M$. Dann gilt:*

$$F \textit{ ist stetig in } x \quad \Leftrightarrow \quad p_i \circ F \textit{ ist stetig in } x \textit{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis. Ist F stetig in x, so ist wegen der Stetigkeit der Projektion p_i auch $p_i \circ F$ stetig in x ($i = 1, \ldots, n$). Seien umgekehrt alle Koordinatenfunktionen $p_i \circ F =: f_i$ stetig in x. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es eine Umgebung U_i von x in M mit

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle } y \in U_i.$$

Dann ist $U := U_1 \cap \ldots \cap U_n$ eine Umgebung von x, und für alle $y \in U$ gilt $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon/\sqrt{n}$ für $i = 1, \ldots, n$, also

$$\|F(y) - F(x)\| \leq \sqrt{n} \|F(y) - F(x)\|_{\max} < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

BEMERKUNG. Analoge Aussagen gelten offenbar, wenn „stetig in x" ersetzt wird durch „stetig" oder „gleichmäßig stetig".

Die Stetigkeit einer Abbildung in einem Punkt kann man natürlich ganz analog wie in Analysis I auch unter Verwendung eines Grenzwertbegriffs für Funktionen formulieren. Der folgende Konvergenzbegriff für Abbildungen zwischen euklidischen Räumen wird später häufig benutzt.

(7.4) **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, X_0 ein Häufungspunkt von M und $Y \in \mathbb{R}^k$. Dann wird definiert

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = Y \quad :\Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall X \in M \setminus \{X_0\} : (\|X - X_0\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - Y\| < \epsilon).$$

Man beachte, daß die Aussage

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = Y$$

nicht erfordert, daß F auch an der Stelle X_0 definiert ist.

Die Stetigkeitsdefinition kann jetzt also auch folgendermaßen umformuliert werden:

$$F \text{ stetig in } X_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{X \to X_0} F(X) = F(X_0).$$

Ebenso wie Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}^n$ gleichbedeutend ist mit Konvergenz der entsprechenden Koordinatenfolgen, kann man Limesbeziehungen für Abbildungen zurückführen auf Limesbeziehungen für die Koordinatenfunktionen:

(7.5) **Satz.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $F : M \to \mathbb{R}^k$ eine Abbildung, X_0 ein Häufungspunkt von M, $Y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ und $f_i := p_i \circ F$, also $F(X) = (f_1(X), \ldots, f_k(X))$ für $X \in M$. Dann gilt:*

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = Y \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{X \to X_0} f_i(X) = y_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Beweis: in Analogie zum Beweis von Satz 6.8 (leichte Übung).

Die formalen Eigenschaften des Konvergenzbegriffes aus (7.4) sind sinngemäß dieselben wie früher im eindimensionalen Fall. Wir nennen nur ein später häufig benutztes Beispiel: Aus

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = Y \quad \text{und} \quad \lim_{X \to X_0} G(X) = Z$$

folgt

$$\lim_{X \to X_0} (F + G)(X) = Y + Z.$$