Analysis II (SS 2000)

R. Schneider

Kapitel 1: Metrische Räume

In diesem Kapitel sollen einige Aussagen über Konvergenz, Stetigkeit und damit zusammenhängende Begriffsbildungen in einem allgemeineren Rahmen betrachtet werden. Diese Verallgemeinerung geschieht nicht um ihrer selbst willen, sondern ist zweckmäßig, damit man in verschiedenartigen konkreten Fällen nicht gleichartige Sachverhalte stets neu beweisen muß.

Zur Motivation soll zunächst an einige Definitionen aus Analysis I erinnert werden. In Analysis I, §7, wurde definiert:

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, sei $a \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* a, wenn gilt:

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon.$$

In §14 haben wir in völlig gleichlautender Weise die Konvergenz einer Folge komplexer Zahlen erklärt. Dabei bezeichnete $|z|$ den Betrag einer komplexen Zahl z.

In §26 tauchte eine ähnliche Definition auf. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Für jede beschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\|f\| := \sup_{x\in D} |f(x)|$$

die *Supremumsnorm* von f erklärt. Seien jetzt f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ beschränkte reelle Funktionen auf D.

Definition. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* (oder *im Sinne der Supremumsnorm*) gegen f, wenn gilt:

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \|f_n - f\| < \epsilon.$$

Die Definition sieht formal wieder genau gleich aus wie oben, obwohl die Folgenglieder keine Zahlen mehr sind, sondern Funktionen, und die Norm $\|\cdot\|$ daher eine andere Bedeutung hat. Trotzdem erinnern wir uns, daß einige einfache Aussagen über diese Konvergenz sich völlig analog wie im Bereich der reellen Zahlen beweisen ließen. Wie eine genauere Analyse dieser Beweise zeigt, werden dabei nur wenige formale Eigenschaften des „Abstandes“ $\|f_n - f\|$ benutzt. Man kann daher eine abstrakte Konvergenztheorie entwickeln, wenn man nur auf einer Grundmenge einen Abstandsbegriff mit entsprechenden formalen Eigenschaften zur Verfügung hat. Einen solchen Abstand nennt man eine „Metrik“ und eine Menge mit einer Metrik dann einen „metrischen Raum“.

Nicht nur Konvergenz läßt sich in diesem allgemeinen Rahmen behandeln. In Analysis I, §14, haben wir erklärt:

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion (mit $D \subset \mathbb{R}$) und $a \in D$. Die Funktion f heißt *stetig in a*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in D : (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Auch hier kommen nur die „Abstände“ $|x-a|$ und $|f(x)-f(a)|$ vor. Die Beweise einiger einfacher Aussagen über stetige Funktionen benutzen nur die formalen Eigenschaften dieser Abstände. Dementsprechend läßt sich auch Stetigkeit allgemein in metrischen Räumen behandeln.

Im Zusammenhang mit der Untersuchung stetiger Funktionen hatten wir ferner in Analysis I sogenannte topologische Begriffe benutzt wie *Umgebung, offen, abgeschlossen, kompakt.* Auch diese Begriffe erfordern zu ihrer Definition nur den Abstandsbegriff (oder noch weniger) und lassen sich daher in wesentlich allgemeinerem Rahmen erfolgreich einsetzen.

1 Metrische und topologische Grundbegriffe

(1.1) **Definition.** Sei M eine nichtleere Menge. Eine *Metrik* auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften. Für alle $x, y, z \in M$ gilt

(a) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(b) $d(x,y) = d(y,x)$,

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ („Dreiecksungleichung“).

Ist d eine Metrik auf M, so heißt die Zahl $d(x,y)$ der *Abstand* von x und y, und das Paar (M,d) heißt *metrischer Raum.*

Sprechweisen. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Die Elemente von M werden häufig als „Punkte“ bezeichnet. Oft wird auch einfach M als metrischer Raum bezeichnet, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Metrik auf M vorgegeben ist.

Beispiele

(1) Sei M die Menge aller endlichen 0-1-Folgen der Länge n. Für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in M$, $\xi_i, \eta_i \in \{0,1\}$, sei $d(x,y)$ die Anzahl der Indizes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\xi_i \neq \eta_i$. Dann ist d eine Metrik auf M, und $d(x,y)$ heißt der *Hamming-Abstand* von x und y.

(2) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x-y|$,

(3) $M = \mathbb{C}$, $d(x,y) := |x-y|$,

(4) $M = \mathbb{R}^n$,

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

(„euklidische Metrik“),

(5) $M = \mathbb{R}^2$,

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

(„Taxi-Metrik“),

(6) $M \neq \emptyset$,

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \neq y, \\ 0, \text{ wenn } x = y. \end{cases}$$

(„diskrete Metrik“),

(7) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften. Für alle $x, y \in V$ gilt

(a) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Nullvektor),

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$,

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so wird durch

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad \text{für } x, y \in V$$

eine Metrik auf V induziert.

(8) Sei M die Menge aller Folgen reeller Zahlen. Auf M wird eine Metrik erklärt durch

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|}$$

für $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in M$.

(9) Seien (M,d), (M',d') metrische Räume. Dann werden auf dem Produkt $M \times M'$ Metriken erklärt durch

$$d_1((x,x'),(y,y')) := d(x,y) + d'(x',y')$$

und durch

$$d_2((x,x'),(y,y')) := \sqrt{d(x,y)^2 + d'(x',y')^2}.$$

Unmittelbar einzusehen ist auch die Richtigkeit der folgenden Behauptung.

(1.2) **Definition und Behauptung.** Sei (M,d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq M' \subset M$ eine Teilmenge. Dann wird durch die Einschränkung

$$d' := d|M' \times M'$$

auf M' eine Metrik d' gegeben. (M',d') heißt *Unterraum* oder *Teilraum* von (M,d).

Im folgenden sei (M,d) ein gegebener metrischer Raum.

(1.3) **Hilfssatz.** *Für alle $x,\overline{x},y,\overline{y} \in M$ gilt die „Vierecksungleichung“*

$$|d(x,\overline{x}) - d(y,\overline{y})| \leq d(x,y) + d(\overline{x},\overline{y}).$$

Beweis. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d(x,\overline{x}) &\leq d(x,y) + d(y,\overline{x}) \\ &\leq d(x,y) + d(y,\overline{y}) + d(\overline{y},\overline{x}) \\ &= d(x,y) + d(y,\overline{y}) + d(\overline{x},\overline{y}), \end{aligned}$$

also

$$d(x,\overline{x}) - d(y,\overline{y}) \leq d(x,y) + d(\overline{x},\overline{y}).$$

Analog ergibt sich

$$d(y,\overline{y}) - d(x,\overline{x}) \leq d(x,y) + d(\overline{x},\overline{y})$$

und damit die Behauptung. ■

Wir übertragen nun einige aus Analysis I bekannte Begriffsbildungen metrischer und topologischer Art in den allgemeineren Rahmen metrischer Räume und beweisen darüber eine Reihe einfacher Aussagen, die im Spezialfall bereits vertraut sind.

(1.4) **Definition.** Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $d(x,y) < c$ für alle $x,y \in A$. Ist A beschränkt, so heißt die reelle Zahl

$$\delta(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

der *Durchmesser* von A.

(1.5) **Satz.** *Die Vereinigung von endlich vielen beschränkten Mengen ist beschränkt.*

Der Beweis ist eine einfache Übungsaufgabe.

(1.6) **Definition.** Sei $x \in M$, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Die Menge

$$U(x, \epsilon) := \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

heißt *offene Kugel* um x mit Radius ϵ.

(1.7) **Definition.** Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *Umgebung* des Punktes $x \in M$, wenn ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert mit $U(x, \epsilon) \subset A$. Die Menge A heißt *offen*, wenn zu jedem $x \in A$ ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert mit $U(x, \epsilon) \subset A$.

Eine Menge ist also genau dann offen, wenn sie Umgebung für jeden ihrer Punkte ist.

(1.8) **Satz.** *Jede offene Kugel ist offen.*

Beweis. Die offene Kugel $U(x, \epsilon)$ in M sei gegeben. Sei $y \in U(x, \epsilon)$. Dann ist $d(x, y) < \epsilon$, also $\epsilon' := \epsilon - d(x, y) > 0$. Ist $z \in U(y, \epsilon')$, so ist $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \epsilon' = \epsilon$, also $z \in U(x, \epsilon)$. Da $z \in U(y, \epsilon')$ beliebig war, ist $U(y, \epsilon') \subset U(x, \epsilon)$. Da $y \in U(x, \epsilon)$ beliebig war, ist $U(x, \epsilon)$ also offen. ∎

Das System aller offenen Teilmengen von M hat die folgenden Eigenschaften.

(1.9) **Satz.**
(a) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*
(b) *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*
(c) $\emptyset$ *und* M *sind offen.*

Beweis. (a) Sei $(A_i)_{i \in I}$ (I eine Indexmenge) eine Familie offener Teilmengen von M. Setze $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Sei $x \in A$. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $x \in A_i$. Da A_i offen ist, existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $U(x, \epsilon) \subset A_i \subset A$. Da $x \in A$ beliebig war, ist A offen.

(b) Sei $(A_i)_{i \in E}$ (E eine endliche Indexmenge) eine endliche Familie offener Teilmengen von M. Setze $B := \bigcap_{i \in E} A_i$. Sei $x \in B$. Für jedes $i \in E$ gilt $x \in A_i$; da A_i offen ist, existiert ein $\epsilon_i \in \mathbb{R}^+$ mit $U(x, \epsilon_i) \subset A_i$. Setze $\epsilon := \min\{\epsilon_i \mid i \in E\}$. Da E endlich ist, existiert das Minimum und ist positiv. Es gilt $U(x, \epsilon) \subset U(x, \epsilon_i) \subset A_i$ für alle $i \in E$, also $U(x, \epsilon) \subset B$. Da $x \in B$ beliebig war, ist B offen.

(c) ist trivial. ∎

(1.10) **Definition.** Sei $A \subset M$ und $x \in M$. Der Punkt x heißt *Berührpunkt* von A, wenn jede Umgebung von x einen Punkt von A enthält, und x heißt *Häufungspunkt* von A, wenn jede Umgebung von x einen Punkt aus $A \setminus \{x\}$ enthält. Die Menge A heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Berührpunkte enthält.

Es sei daran erinnert, daß man (unter Bezugnahme auf eine bestimmte vorliegende Grundmenge M) unter dem *Komplement* einer Teilmenge $A \subset M$ die Menge

$$A^c := M \setminus A$$

versteht und daß $(A^c)^c = A$ ist.

(1.11) **Satz.** *Die Teilmenge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement A^c offen ist.*

Beweis. Sei A abgeschlossen. Sei $x \in A^c$. Dann ist x nicht Berührpunkt von A, also existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $U(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$, das heißt mit $U(x, \epsilon) \subset A^c$. Da $x \in A^c$ beliebig war, ist A^c offen.

Sei A^c offen. Sei x Berührpunkt von A. Angenommen, es wäre $x \notin A$, also $x \in A^c$. Da A^c offen ist, existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $U(x, \epsilon) \subset A^c$, also mit $U(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$, folglich ist x kein Berührpunkt von A. Aus dem Widerspruch folgt $x \in A$. Da x ein beliebiger Berührpunkt von A war, ist A abgeschlossen. ■

Beispiel. In einem Raum mit diskreter Metrik d ist jede Teilmenge offen, denn mit $x \in A$ ist $U(x, 1) = \{x\} \subset A$. Nach (1.11) ist daher auch jede Teilmenge abgeschlossen.

Im allgemeinen ist eine Teilmenge eines metrischen Raumes weder offen noch abgeschlossen.

Unter Verwendung von (1.11) und den de Morganschen Regeln $(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c$ und $(\bigcap A_i)^c = \bigcup A_i^c$ ergibt sich aus (1.9) sofort die folgende duale Aussage.

(1.12) **Satz.**
(a) *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
(b) *Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
(c) *M und $\emptyset$ sind abgeschlossen.*

(1.13) **Definition.** Sei $A \subset M$ und $x \in M$. Der Punkt x heißt *innerer Punkt* von A, wenn ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert mit $U(x, \epsilon) \subset A$ (also wenn A Umgebung von x ist). Der Punkt x heißt *Randpunkt* von A, wenn jede Umgebung von x Punkte aus A und aus A^c enthält. Die Menge A^o aller inneren Punkte von A heißt das *Innere* oder der *offene Kern* von A; die Menge $\overline{A}$ aller Berührpunkte von A heißt die *abgeschlossene Hülle* von A, und die Menge ∂A aller Randpunkte von A heißt der *Rand* von A.

Bemerkung. Unmittelbar aus den Definitionen folgt $\overline{A} = A \cup \partial A$ und $\partial A = \overline{A} \setminus A^o$.

(1.14) **Satz.** *Sei $A \subset M$. Das Innere A^o ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A; A^o ist offen. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von M, die A enthalten.*

Der Beweis kann als Übungsaufgabe dienen.

(1.15) **Definition.** Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *dicht*, wenn $\overline{A} = M$ ist.

Beispiel. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind dicht in $\mathbb{R}$.

2 Konvergenz und Vollständigkeit

Im folgenden liegt wieder ein fester metrischer Raum (M, d) zugrunde.

Die Konvergenz einer Punktfolge in einem metrischen Raum kann wörtlich so wie für Folgen reeller Zahlen erklärt werden, wenn der Abstand reeller Zahlen durch den allgemeinen Abstand ersetzt wird.

(2.1) **Definition.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, sei $x \in M$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* x, und x heißt *Grenzwert* (*Grenzpunkt, Limes*) der Folge, geschrieben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{oder} \qquad x_n \to x \;\; (n \to \infty),$$

wenn zu jeder Umgebung U von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$x_n \in U \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn sie konvergent gegen ein $x \in M$ ist.

Man beachte, daß bei Verwendung der Schreibweisen $\lim x_n = x$ etc. stets klar sein muß, auf welche Metrik sich diese Konvergenz bezieht.

Wir geben noch zwei offensichtlich äquivalente Umformulierungen der Konvergenzdefinition an:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.\end{aligned}$$

Einige elementare Aussagen über Konvergenz lassen sich analog wie in Analysis I beweisen.

(2.2) **Satz.** *Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die sowohl gegen x als auch gegen y konvergiert. Angenommen, es wäre $x \neq y$. Dann ist $d(x,y) > 0$. Zu $\epsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$ gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x,x_n) < \epsilon$ für $n \geq n_0$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $d(y,x_n) < \epsilon$ für $n \geq n_1$. Für $n \geq \max\{n_0,n_1\}$ gilt also

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y) < \epsilon + \epsilon = d(x,y).$$

Aus diesem Widerspruch folgt $x = y$. ■

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(2.3) **Satz.** *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x,x_n) < 1$ für $n \geq n_0$. Mit

$$c := \max\{1, d(x,x_1), \ldots, d(x,x_{n_0-1})\}$$

gilt also für beliebige $n,m \in \mathbb{N}$

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) \leq 2c.$$ ■

Bemerkung. Der wichtige Satz von Bolzano-Weierstraß aus Analysis I besagt, daß in $\mathbb{R}$ jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt. Diese Aussage läßt sich nicht auf allgemeine metrische Räume übertragen. Zum Beispiel besitzt eine injektive Folge in einem Raum mit diskreter Metrik keine konvergente Teilfolge, ist aber beschränkt.

(2.4) **Satz.** *Jeder Berührpunkt von $A \subset M$ ist Limes einer Folge in A.*

Beweis. Sei x Berührpunkt von A. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $U(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$; wir können also einen Punkt $x_n \in U(x,\frac{1}{n}) \cap A$ auswählen. Damit ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert, die wegen $d(x,x_n) < \frac{1}{n}$ gegen x konvergiert. ■

Hieraus folgt insbesondere: Die Menge $A \subset M$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A ebenfalls in A liegt.

Wenn zwei Folgen konvergieren, so konvergieren auch die Abstände entsprechender Punkte:

(2.5) **Hilfssatz.** *Aus* $\lim x_n = x$ *und* $\lim y_n = y$ *folgt* $\lim d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

Beweis. Nach (1.2) ist

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| \leq d(x_n,x) + d(y_n,y),$$

woran man die Behauptung abliest. ■

(2.6) **Definition.** Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \qquad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

(2.7) **Satz.** *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $\lim x_n = x$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_n) < \epsilon/2$ für $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ gilt also

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon.$$ ■

Daß umgekehrt nicht jede Cauchy-Folge konvergiert, zeigt schon das Beispiel des Raumes der rationalen Zahlen. Andererseits gilt in $\mathbb{R}$ das Cauchysche Konvergenzkriterium, und hierauf (bzw. auf äquivalenten Aussagen) beruhten letzten Endes die meisten wesentlichen Sätze aus Analysis I. Die metrischen Räume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, sind daher besonders wichtig.

(2.8) **Definition.** Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt vollständig, wenn sie als Unterraum (mit der induzierten Metrik) vollständig ist, wenn also jede Cauchy-Folge in A gegen einen Punkt von A konvergiert.

(2.9) **Satz.** *Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen. In einem vollständigen metrischen Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge vollständig.*

Beweis. Sei M ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine vollständige Teilmenge. Sei x ein Berührpunkt von A. Nach (2.4) gibt es eine Folge in A, die gegen x konvergiert. Nach (2.7) ist diese Folge eine Cauchy-Folge, wegen der Vollständigkeit von A ist sie also konvergent gegen einen Punkt $y \in A$. Nach (2.2) ist $x = y$, also $x \in A$. Somit ist A abgeschlossen.

Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ eine abgeschlossene Teilmenge. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A. Da M vollständig ist, konvergiert sie gegen einen Punkt $x \in M$. Dieser ist Berührpunkt von A und daher Element von A. Somit ist A vollständig. ■

(2.10) **Definition.** Ein normierter Vektorraum, der (mit der durch die Norm induzierten Metrik) vollständig ist, heißt *Banachraum*.

Das folgende Beispiel wird im nächsten Abschnitt von Bedeutung sein. Wir betrachten eine Menge $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und die Menge $B(D)$ aller beschränkten reellen Funktionen auf D. Mit den wie üblich (d.h. punktweise) für Funktionen erklärten Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren ist $B(D)$ ein reeller Vektorraum, und die Supremumsnorm $\|\cdot\|$ ist darauf eine Norm. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B(D)$ ist nach der obigen Festsetzung eine Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\| < \epsilon.$$

Diese Definition einer Cauchy-Folge von Funktionen auf D haben wir auch schon in Analysis I, §26, verwendet. Dort haben wir gezeigt: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Gleichmäßige Konvergenz ist aber dasselbe wie Konvergenz im Sinne der Supremumsnorm. Wir haben also:

(2.11) **Satz.** *$B(D)$ ist ein Banachraum.*

Mit $C(D)$ bezeichnen wir nun die Teilmenge der stetigen Funktionen in $B(D)$. Natürlich ist $C(D)$ ein Untervektorraum. Wir behaupten, daß er abgeschlossen ist. Sei also f ein Berührpunkt von $C(D)$. Nach Satz (2.4) ist f Limes einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(D)$. Die Konvergenz bezieht sich hier auf die Supremumsnorm, die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gleichmäßig gegen f. Da alle f_n stetig sind, ist f nach Satz (26.2) aus Analysis I ebenfalls stetig, also Element von $C(D)$. Somit ist $C(D)$ abgeschlossen. Aus Satz (2.11) und Satz (2.9) folgt, daß $C(D)$ vollständig ist. Wir haben also gezeigt:

(2.12) **Satz.** *$C(D)$ ist ein Banachraum.*

3 Der Banachsche Fixpunktsatz

Eine wesentliche Aufgabe der Analysis, vor allem in den Anwendungen, besteht im „Lösen von Gleichungen". Hierbei kann es sich um die Bestimmung von Nullstellen komplizierter Funktionen, Auflösung linearer Gleichungssysteme, Lösen von gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen, Berechnen von implizit definierten Funktionen, Integralgleichungen und vieles andere handeln. In manchen Fällen kann man hier das Verfahren der „sukzessiven Approximationen" verwenden, das sowohl die Existenz einer Lösung zu beweisen gestattet als auch eine schrittweise Berechnung von Näherungslösungen mit vorgeschriebener Genauigkeit ermöglicht. Das zugrundeliegende Prinzip läßt sich allgemein formulieren und beweisen als ein Fixpunktsatz für gewisse Abbildungen eines vollständigen metrischen Raumes in sich. In diesem Satz, den wir jetzt beweisen wollen, haben wir ein besonders eindrucksvolles Beispiel für die Bedeutung und Auswirkung der Vollständigkeit von metrischen Räumen.

(3.1) **Definition.** Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : M \to M$ heißt *kontrahierend*, wenn es eine reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y) \qquad \text{für alle } x,y \in M.$$

Jede Zahl c mit dieser Eigenschaft heißt eine *Lipschitzkonstante* der Abbildung f. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Fixpunkt* von f, wenn $f(x) = x$ ist.

(3.2) **Satz** (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : M \to M$ eine kontrahierende Abbildung. Dann hat f genau einen Fixpunkt.*

Ist $x_0 \in M$ beliebig und wird rekursiv

$$x_{n+1} := f(x_n) \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0$$

definiert, so konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt x, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$d(x_n, x) \leq \frac{c}{1-c}\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_0, x_1),$$

wenn $c < 1$ eine Lipschitzkonstante der Abbildung f ist.

Beweis. Sei M vollständig und $f : M \to M$ eine Abbildung mit einer Lipschitzkonstanten $c < 1$. Daß f höchstens einen Fixpunkt hat, ist klar: Gilt $f(x) = x$ und $f(y) = y$, so ist

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y),$$

wegen $c < 1$ also $d(x,y) = 0$ und daher $x = y$.

Wir wählen nun $x_0 \in M$ beliebig und definieren rekursiv $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen zeigen, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Für $n \geq 1$ gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq cd(x_{n-1}, x_n).$$

Durch vollständige Induktion bekommt man daraus

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1)$$

und hieraus für $n \geq 1$ und $p \geq 1$ unter mehrfacher Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n \frac{1-c^p}{1-c}\, d(x_0, x_1) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$; somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da M als vollständig vorausgesetzt ist, existiert ein Punkt $x \in M$ mit $\lim x_n = x$. Wegen $d(f(x), f(x_n)) \leq cd(x, x_n)$ gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Also ist x ein Fixpunkt von f.

Die Fehlerabschätzung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (c + c^2 + \ldots + c^p)\, d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

durch den Grenzübergang $p \to \infty$, wobei (2.5) zu beachten ist. Es folgt

$$d(x_n, x) \leq \frac{c}{1-c}\, d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_0, x_1).$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Bei konkreter Anwendung wird man, um einen Fixpunkt der kontrahierenden Abbildung f näherungsweise zu berechnen, so vorgehen: Man wählt x_0 beliebig (aber möglichst nahe beim Fixpunkt, wenn man eine Vermutung über dessen ungefähre Lage hat), berechnet $x_1 = f(x_0)$ (wir unterstellen, daß dies möglich ist – meist wird es auch nur näherungsweise möglich sein), berechnet $x_2 = f(x_1)$, und so weiter. Wegen der schrittweisen Annäherung an den Fixpunkt spricht man von einem „Iterationsverfahren“ oder von „sukzessiven Approximationen“. Nach dem n-ten Schritt liefert die Ungleichung

$$d(x_n, x) \leq \frac{c}{1-c}\, d(x_{n-1}, x_n)$$

eine Information darüber, wie weit man höchstens vom Fixpunkt entfernt ist. Wenn man zu Beginn des Verfahrens schon abschätzen will, wieviele Schritte man höchstens braucht, um den Faktor unter eine vorgegebene Schranke zu drücken, so erhält man eine solche Information (nach Berechnung von x_1) aus der Ungleichung

$$d(x_n, x) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_0, x_1).$$

Bemerkung. In (3.2) ist die Voraussetzung wesentlich, daß die Abbildung f eine Lipschitzkonstante $c < 1$ besitzt. Die schwächere Voraussetzung

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in M \text{ mit } x \neq y$$