reicht nicht aus, um die Existenz eines Fixpunktes zu zeigen. Zum Beispiel sei $M = \mathbb{R}$ (mit der üblichen Metrik) und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := x - \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

also $0 \leq f'(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt daraus

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq y.$$

Da aber $f(x) < x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, hat f keinen Fixpunkt.

Wir behandeln zwei Anwendungsbeispiele für den Banachschen Fixpunktsatz.

Zunächst betrachten wir eine reelle Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$. Es sei eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$ zu finden. Ist f stetig, so existiert nach dem Zwischenwertsatz jedenfalls eine Lösung, denn es ist $f(x) - x \geq 0$ für $x = a$ und ≤ 0 für $x = b$. Für die Eindeutigkeit der Lösung und die näherungsweise Berechenbarkeit durch sukzessive Approximationen ist zum Beispiel hinreichend, daß f differenzierbar ist und eine Konstante $c < 1$ existiert mit

$$|f'(x)| \leq c \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Hieraus folgt nämlich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in [a,b],$$

so daß Satz (3.2) anwendbar ist mit $M = [a,b]$.

Das nächste Beispiel ist etwas schwieriger, aber interessanter und besonders wichtig. Es handelt sich um das sogenannte *Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.* In der üblichen Schreibweise lautet es

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Wir präzisieren und erläutern das folgendermaßen. Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine gegebene reelle Funktion. Ferner sei ein Punkt $(x_0, y_0) \in I \times J$ gegeben. Gesucht ist eine in einer Umgebung $U \subset I$ von x_0 definierte differenzierbare reelle Funktion y (mit $y(U) \subset J$), für die

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \qquad \text{für alle } x \in U, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

gilt (man veranschauliche sich die Aufgabenstellung durch ein „Richtungsfeld“).

Wir wollen zeigen, daß man die Existenz einer solchen Lösung aus dem Banachschen Fixpunktsatz erhält, wenn die Funktion f die folgende Voraussetzung erfüllt.

Voraussetzung. f sei stetig in $I \times J$ (die Erklärung erfolgt erst in §4) und beschränkt und genüge einer Lipschitzbedingung in der zweiten Veränderlichen, das heißt es gebe eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

für alle $x \in I$ und alle $y_1, y_2 \in J$.

Wenn wir eine (in einem Intervall um x_0 erklärte) stetige Funktion y haben mit

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \qquad (*)$$

so ist y nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Analysis I, (21.2)) differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

das heißt y löst unser Anfangswertproblem. Diese Tatsache werden wir im folgenden ausnutzen.

Wir müssen nun eine geeignete Situation herstellen, in der wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden können. Nach Voraussetzung existiert eine Konstante $a \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x,y)| < a \qquad \text{für } (x,y) \in I \times J.$$

Wir können $\delta > 0$ wählen, so daß $\delta L < 1$ und

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta a, y_0 + \delta a] \subset I \times J$$

ist. Sodann sei $C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ der reelle Vektorraum aller stetigen reellen Funktionen auf dem Intervall $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|$ und

$$\begin{aligned} M \;:=\; & \{g \in C([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) : \\ & \quad g(x_0) = y_0 \text{ und } |g(x) - y_0| \leq \delta a \text{ für } |x - x_0| \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Der Raum $C([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ ist nach Satz (2.12) vollständig. Die Teilmenge M ist offenbar abgeschlossen und daher nach (2.9) ebenfalls vollständig. Wir definieren nun eine Abbildung $F : M \to M$ in der folgenden Weise. Für $g \in M$ sei die Funktion $F(g)$ erklärt durch

$$F(g)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt \qquad \text{für } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Die Funktion $F(g)$ ist stetig, sie erfüllt $F(g)(x_0) = y_0$, und für jedes $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gilt

$$|F(g)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t))|\, dt \leq \delta a.$$

Also ist $F(g) \in M$, so daß in der Tat eine Abbildung $F : M \to M$ erklärt worden ist. Wir zeigen, daß F kontrahierend ist. Sei $g, h \in M$. Für $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gilt

$$\begin{aligned} |F(g)(x) - F(h)(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, g(t)) - f(t, h(t))]\, dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, g(t)) - f(t, h(t))|\, dt \leq L \int_{x_0}^{x} |g(t) - h(t)| dt \\ &\leq L\delta \|g - h\|. \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gilt, ist

$$\|F(g) - F(h)\| \leq L\delta \|g - h\|.$$

Nach Wahl von δ ist $L\delta < 1$, also F in der Tat kontrahierend. Jetzt folgt aus Satz (3.2), daß F einen Fixpunkt besitzt. Es gibt also ein Element $y \in M$ mit $F(y) = y$. Die Funktion y ist auf $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ erklärt, dort stetig, und sie erfüllt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \qquad \text{für } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Wie oben bemerkt, folgt hieraus

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Aus der eindeutigen Bestimmtheit des Fixpunktes folgt auch, daß y als Lösung des Anfangswertproblems auf $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ eindeutig bestimmt ist.

Das Verfahren der sukzessiven Approximation zur näherungsweisen Berechnung der Lösung sieht in diesem Fall so aus, daß man zum Beispiel

$$y_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt$$

und dann für $n \in \mathbb{N}$

$$y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$$

für $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ definiert. Die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann gleichmäßig in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Im allgemeinen werden natürlich die Integrationen, die bei jedem Schritt durchgeführt werden müssen, nicht in geschlossener Form, sondern auch nur näherungsweise durchführbar sein, was zusätzliche Fehlerabschätzungen erfordert.

4 Stetigkeit und Zusammenhang

Im folgenden seien (M, d), (M', d') metrische Räume. Wir wollen Abbildungen $f : M \to M'$ betrachten. Im Spezialfall $M' \subset \mathbb{R}$ sprechen wir auch von reellen Funktionen auf M. Die Definition der Stetigkeit einer Abbildung läßt sich wörtlich aus dem in Analysis I betrachteten Spezialfall übernehmen.

(4.1) **Definition.** Sei $f : M \to M'$ eine Abbildung, sei $x \in M$. Die Abbildung f heißt *stetig in x*, wenn zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert mit $f(U) \subset V$. Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie stetig in x ist für alle $x \in M$.

Gemäß der Definition der Umgebungen können wir die Stetigkeit in äquivalenter Weise auch folgendermaßen erklären:

$$\begin{aligned} &f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow \\ &\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \;\; \forall y \in M : (d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon). \end{aligned}$$

(4.2) **Satz.** *Die Abbildung $f : M \to M'$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $A \subset M'$ das Urbild $f^{-1}(A)$ offen ist.*

Beweis. Sei f stetig. Sei $A \subset M'$ offen. Sei $x \in f^{-1}(A)$. Dann ist $f(x) \in A$. Da A offen ist, ist A Umgebung von $f(x)$. Da f in x stetig ist, existiert eine Umgebung $U \subset M$ von x mit $f(U) \subset A$, also mit $U \subset f^{-1}(A)$. Somit ist $f^{-1}(A)$ offen.

Für jede offene Menge $A \subset M'$ sei $f^{-1}(A)$ offen. Sei $x \in M$. Sei V eine Umgebung von $f(x)$; sie enthält eine offene Umgebung V_0 von $f(x)$. Dann ist $U := f^{-1}(V_0)$ offen, also Umgebung von x, und es gilt $f(U) \subset V_0 \subset V$. Also ist f stetig in x. ■

Einige Aussagen über stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen lassen sich ganz analog wie im Spezialfall $M = M' = \mathbb{R}$ beweisen.

(4.3) **Satz.** *Die Abbildung $f : M \to M'$ ist genau dann stetig in x, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ stets $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ folgt.*

Beweis. Sei $f : M \to M'$ stetig in x. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Wegen der Stetigkeit von f in x existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Wegen $\lim x_n = x$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für $n \geq n_0$. Für alle $n \geq n_0$ gilt also $f(x_n) \in f(U) \subset V$. Da V eine beliebige Umgebung von $f(x)$ war, ist damit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gezeigt.

Umgekehrt folge aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ stets $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Angenommen, f wäre nicht stetig in x. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(x)$ derart, daß für keine Umgebung U von x die Inklusion $f(U) \subset V$ besteht. Insbesondere können wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in U(x, 1/n)$ auswählen mit $f(x_n) \notin V$. Damit ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M definiert, die wegen $d(x, x_n) < 1/n$ gegen x konvergiert, für die aber die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $f(x_n) \notin V$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung; also ist f stetig in x. ■

(4.4) **Satz.** *Seien M, M', M'' metrische Räume. Sei $f : M \to M'$ stetig in x und $g : M' \to M''$ stetig in $f(x)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x.*

Beweis. Zu einer vorgegebenen Umgebung V von $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ gibt es eine Umgebung W von $f(x)$ mit $g(W) \subset V$. Zu W gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset W$. Es folgt $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(W) \subset V$. ■

Ebenfalls in Analogie zu Analysis I definieren wir noch:

(4.5) **Definition.** Die Abbildung $f : M \to M'$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$d'(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \text{für alle } x, y \in M \text{ mit } d(x, y) < \delta.$$

Insbesondere (aber nicht nur in diesem Fall) ist eine Abbildung $f : M \to M'$ gleichmäßig stetig, wenn es eine Konstante c gibt mit

$$d'(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in M.$$

Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennt man *Lipschitzabbildungen* (für $(M',d') = (M,d)$ und $c < 1$ kamen sie bereits im Banachschen Fixpunktsatz vor).

Wir betrachten jetzt speziell stetige Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}$, also reellwertige stetige Funktionen, und wir wollen Satz (26.2) aus Analysis I verallgemeinern. Wir können ganz allgemein (d.h. für beliebige Mengen M) für beschränkte Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ die Supremumsnorm erklären durch

$$\|f\| := \sup_{x\in M} |f(x)|.$$

Wir sagen dann, völlig analog zu dem früher betrachteten Spezialfall $M \subset \mathbb{R}$, daß die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf M *gleichmäßig gegen f konvergiert*, wenn $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ ist.

(4.6) **Satz.** *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen reellen Funktionen auf M konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion f. Dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $x \in M$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{für } n \geq n_0 \text{ und alle } y \in M.$$

Wähle ein $n \geq n_0$. Da f_n stetig ist, existiert eine Umgebung U von x mit

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{für alle } y \in U.$$

Für $y \in U$ gilt also

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \epsilon.$$

Da $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig war, ist f stetig in x. Da $x \in M$ beliebig war, ist f stetig. ■

Ein besonders wichtiger Satz aus Analysis I über stetige Funktionen ist der Zwischenwertsatz: Eine auf einem Intervall definierte stetige reelle Funktion nimmt jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten an. Wenn man versuchen will, diesen Satz auf stetige Funktionen auf einem metrischen Raum zu verallgemeinern, steht man vor dem folgenden Problem. Wie triviale Gegenbeispiele zeigen, ist für die Gültigkeit des Zwischenwertsatzes die Voraussetzung unentbehrlich, daß der Definitionsbereich ein Intervall ist. Aber ein Intervall ist unter Verwendung der Anordnungsrelation für reelle Zahlen definiert worden; diese Definition läßt sich also nicht auf Teilmengen beliebiger metrischer Räume übertragen. Es zeigt sich aber, daß die für die Gültigkeit des Zwischenwertsatzes wesentliche Eigenschaft der Intervalle auch ohne Verwendung der Anordnungsrelation und damit in verallgemeinerungsfähiger Weise formuliert werden kann. Die hier gemeinte wesentliche Eigenschaft besteht darin, daß ein Intervall sozusagen „aus einem Stück besteht". Man bezeichnet diese Eigenschaft als Zusammenhang und definiert sie allgemein folgendermaßen.

(4.7) **Definition.** Der metrische Raum M heißt *zusammenhängend*, wenn es keine offenen Teilmengen $A_1, A_2 \subset M$ gibt mit

$$A_1 \neq \emptyset, \;\; A_2 \neq \emptyset, \;\; A_1 \cap A_2 = \emptyset, \;\; A_1 \cup A_2 = M.$$

Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie als Teilraum (mit der induzierten Metrik) zusammenhängend ist.

Wenn $M = A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ist (man sagt dann, M sei in die Mengen A_1, A_2 *zerlegt*), so sind A_1 und A_2 nach (1.11) genau dann beide offen, wenn sie abgeschlossen sind. Man kann also die Definition des Zusammenhangs auch äquivalent folgendermaßen fassen: Der metrische Raum M ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und M die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M sind.

Daß die Definition (4.7) das Gewünschte leistet, zeigt der folgende Satz.

(4.8) **Satz.** *Eine stetige reelle Funktion auf einem zusammenhängenden metrischen Raum nimmt jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten an.*

Beweis. Sei M zusammenhängend und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die zwischen zwei von f angenommenen Funktionswerten liegt. Dann sind die Mengen $A_1 := f^{-1}((-\infty, c))$ und $A_2 := f^{-1}((c, \infty))$ nicht leer und nach (4.2) offen, ferner ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Würde c nicht als Funktionswert angenommen, so wäre $A_1 \cup A_2 = M$, also wäre M nicht zusammenhängend, ein Widerspruch. ■

Der Zwischenwertsatz aus Analysis I ergibt sich allerdings nicht unmittelbar als Spezialfall von Satz (4.8), da wir noch nicht wissen, daß ein Intervall zusammenhängend ist. Dies kann man umgekehrt gerade mit dem Zwischenwertsatz beweisen.

(4.9) **Satz.** *Jedes Intervall in* $\mathbb{R}$ *ist zusamenhängend.*

Beweis. Allgemeiner sei M ein metrischer Raum mit der Eigenschaft, daß jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten annimmt. Seien $A_1, A_2 \subset M$ nichtleere offene Teilmengen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Angenommen, es wäre $A_1 \cup A_2 = M$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \in A_1, \\ 0 \text{ für } x \in A_2. \end{cases}$$

Die damit erklärte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist stetig, weil Urbilder offener Mengen offen sind. Sie nimmt, da A_1 und A_2 nicht leer sind, die Werte 0 und 1 an, aber keinen Wert, der echt zwischen 0 und 1 liegt. Aus dem Widerspruch folgt, daß M zusammenhängend ist. ■

5 Kompaktheit

Unter den möglichen Eigenschaften metrischer Räume sind zwei von herausragender Bedeutung in der Analysis, da sie direkt oder indirekt in die Voraussetzungen vieler wichtiger Sätze eingehen. Dies sind die Vollständigkeit und die jetzt zu behandelnde Kompaktheit.

In Analysis I (§10) hatten wir eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ als *kompakt* bezeichnet, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Die Voraussetzung der Kompaktheit der Menge $D \subset \mathbb{R}$ spielte in den folgenden wichtigen Sätzen aus Analysis I eine wesentliche Rolle.

Analysis I (10.6): Jede Folge in D besitzt eine Teilfolge, die gegen ein Element von D konvergiert.

Analysis I (12.2): Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ein Maximum an.

Analysis I (12.5): Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Wir möchten diese Sätze ausdehnen auf allgemeine metrische Räume. Wenn wir auch dort unter kompakten Mengen solche verstehen, die beschränkt und abgeschlossen sind, so sind aber die Sätze im allgemeinen falsch! Zum Beispiel ist der metrische Raum $(\mathbb{N}, d)$, wo d die diskrete Metrik ist, beschränkt und abgeschlossen. Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt aber keine konvergente Teilfolge, da keine Teilfolge eine Cauchy-Folge ist. Und die durch $f(n) = n$ erklärte Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist stetig, da in $(\mathbb{N}, d)$ jede Teilmenge offen ist, sie nimmt aber kein Maximum an. Diese Beispiele zeigen, daß die Verallgemeinerung der obigen Sätze höchstens dann gelten kann, wenn im allgemeinen Fall die Kompaktheit einschneidender definiert wird. Wie dies zweckmäßig zu geschehen hat, wird durch den Überdeckungssatz von Heine-Borel nahegelegt. Nach diesem Satz (Analysis I, (10.8)) und seiner Umkehrung (Analysis I, (10.9)) ist eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält. Diese Überdeckungseigenschaft verwenden wir nun im allgemeinen Fall als Definition der Kompaktheit.

(5.1) **Definition.** Sei (M, d) ein metrischer Raum, $A \subset M$ eine Teilmenge und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M. Die Familie $(U_i)_{i\in I}$ heißt *Überdeckung* der Menge A, wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ gilt, und *offene Überdeckung* von A, wenn außerdem alle U_i offene Mengen sind.

(5.2) **Definition.** Die Teilmenge $A \subset M$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung von A enthält.

(5.3) **Satz.** *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt. In einem kompakten metrischen Raum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.*

Beweis. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Sei $A \subset M$ kompakt. Sei x ein Berührpunkt von A. Angenommen, $x \notin A$. Dann ist $(U(y, \frac{1}{2}d(x,y)))_{y \in A}$ eine offene Überdeckung von A, enthält also eine endliche Teilüberdeckung $(U(y_i, \frac{1}{2}d(x, y_i)))_{i=1,\dots,n}$. Setze $\epsilon := \min\{d(x, y_i) \mid i = 1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$U\left(x, \frac{1}{2}\epsilon\right) \cap U\left(y_i, \frac{1}{2}d(x, y_i)\right) = \emptyset \qquad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

also $U(x, \frac{1}{2}\epsilon) \cap A = \emptyset$. Somit ist x nicht Berührpunkt von A, ein Widerspruch. Damit ist die Abgeschlossenheit von A gezeigt.

Da die Überdeckung $(U(y, 1))_{y \in A}$ von A eine endliche Überdeckung von A enthält, ist A nach (1.5) beschränkt.

Sei jetzt M kompakt und $A \subset M$ abgeschlossen. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann ist $(U_i \cup A^c)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M, enthält also eine endliche Teilüberdeckung $(U_i \cup A^c)_{i \in E}$ ($E \subset I$ endlich). $(U_i)_{i \in E}$ ist eine endliche Überdeckung von A. Damit ist die Kompaktheit von A gezeigt. ∎

Wir müssen nun zeigen, daß unser allgemeiner Kompaktheitsbegriff wirklich das Gewünschte leistet, also eine Ausdehnung der am Anfang dieses Abschnitts zitierten Sätze aus Analysis I ermöglicht.

(5.4) **Satz.** *Ist $f : M \to M'$ eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes M in einen metrischen Raum M', so ist das Bild $f(M)$ kompakt.*

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(M)$. Nach (4.2) ist $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M, enthält also eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(U_i))_{i \in E}$ ($E \subset I$ endlich). Dann ist $(U_i)_{i \in E}$ eine endliche Überdeckung von $f(M)$. ∎

(5.5) **Korollar.** *Eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten metrischen Raum M nimmt ein Maximum an.*

Beweis. Nach (5.4) ist $f(M)$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Jede abgeschlossene, beschränkte und nichtleere Menge reeller Zahlen enthält ein größtes Element. ■

(5.6) **Satz.** *Jede stetige Abbildung $f : M \to M'$ eines kompakten metrischen Raumes (M, d) in einen metrischen Raum (M', d') ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei M kompakt und $f : M \to M'$ stetig. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Zu jedem $z \in M$ existiert, da f in z stetig ist, ein $\delta(z) \in \mathbb{R}^+$ mit

$$d'(f(x), f(z)) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{für alle } x \in M \text{ mit } d(x, z) < \delta(z).$$

Das System $(U(z, \frac{1}{2}\delta(z)))_{z\in M}$ ist eine offene Überdeckung von M, enthält also eine endliche Teilüberdeckung $(U(z_i, \frac{1}{2}\delta(z_i)))_{i=1,\dots,n}$. Setze $\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta(z_i) \mid i = 1, \dots, n\}$. Seien jetzt $x, y \in M$ beliebige Punkte mit $d(x, y) < \delta$. Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in U(z_i, \frac{1}{2}\delta(z_i))$. Dann ist $d(x, z_i) < \frac{1}{2}\delta(z_i) < \delta(z_i)$, ferner $d(y, z_i) \leq d(y, x) + d(x, z_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta(z_i) \leq \delta(z_i)$. Es folgt

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(z_i)) + d'(f(z_i), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Also ist f gleichmäßig stetig. ■

(5.7) **Satz.** *Sei $A \subset M$ kompakt. Dann besitzt jede Folge in A eine Teilfolge, die gegen einen Punkt von A konvergiert.*

Beweis. Sei A kompakt und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A. Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die abgeschlossene Hülle der Menge $\{x_i \mid i \geq n\}$. Angenommen, es wäre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A \cap A_n) = \emptyset$. Dann ist die Familie $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von A, enthält also eine endliche Teilüberdeckung von A. Es gibt daher ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A \subset \bigcup_{n=1}^m A_n^c$, also mit $\bigcap_{n=1}^m (A \cap A_n) = \emptyset$. Wegen $A_m \subset A_n$ für $m \geq n$ ist das ein Widerspruch. Somit existiert ein Punkt $z \in A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Da z Berührpunkt von $\{x_i \mid i \geq 1\}$ ist, existiert ein $i_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{i_1} \in U(z, 1)$. Seien $i_1, \dots, i_{k-1}$ schon definiert. Da z Berührpunkt von $\{x_i \mid i \geq i_{k-1} + 1\}$ ist, existiert ein $i_k > i_{k-1}$ mit $x_{i_k} \in U(z, \frac{1}{k})$. Damit ist eine Teilfolge $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definiert, die gegen den Punkt $z \in A$ konvergiert. ■

(5.8) **Korollar.** *Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.*

Beweis. Jede Cauchy-Folge in einem kompakten metrischen Raum besitzt nach (5.7) eine Teilfolge, die gegen einen Punkt z konvergiert. Aus der Cauchy-Eigenschaft der Folge ergibt sich mit der Dreiecksungleichung, daß sie selbst gegen z konvergieren muß. ■