Abteilung für Angewandte Mathematik 18.04.2005
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis II

SS 2005 — Woche 2

Abgabe: Montag, den 25. April, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$.

(a) Zeigen Sie, dass das A° die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist und $\overline{A}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von M ist, die A enthalten.

Aufgabe 2: 5 Punkte

Es geht um die Interpretation des Ausdrucks

$$\hat{x} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots}}}}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, angewandt auf die Funktion $f(x) := \sqrt{2 + x}$, dass $\hat{x}$ wohldefiniert ist.

Aufgabe 3: 5 Punkte + 4 Sonderpunkte

Sei l^∞ die Menge aller beschränkten, reellen Folgen und c_0 die Menge aller Nullfolgen.

(a) Zeigen Sie, dass $\|(x_j)\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$ eine Norm auf l^∞ ist. Dies ist die sogenannte *Supremumsnorm*.

(b) Zeigen Sie, dass c_0 eine abgeschlossene Teilmenge von l^∞ ist.

(c) Zeigen Sie, dass l^∞ nicht die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft hat, d.h. es gibt beschränkte Folgen in l^∞, die keine konvergente Teilfolge haben.