Abteilung für Angewandte Mathematik 25.04.2005
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis II

SS 2005 — Woche 3

Abgabe: Montag, den 2. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Seien $L, K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass $L+K := \{x + y \in \mathbb{R}^n \,:\, x \in L, y \in L\}$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann wird M mit der Standardmetrik $d(x,y) := |x-y|$ von $\mathbb{R}^n$ zum metrischen Raum. Zeigen Sie, dass eine Menge $U \subset M$ genau dann offen bzgl. (M,d) ist, wenn es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $U = M \cap W$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien M_1 und M_2 metrische Räume und sei $\varphi : M_1 \to M_2$ stetig. Weiterhin sei M_1 zusammenhängend. Zeigen Sie, dass $\varphi(M_1)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 4: **3+3+2 Punkte**

Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt Homeomorphismus, falls φ stetig und bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Gibt es so einen Homeomorphismus, so heißen X und Y homeomorph.

(a) Seien X, Y metrische Räume und $\varphi : X \to Y$ ein Homeomorphismus. Zeigen Sie, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn Y zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zusammenhängend sind. (Tipp: Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$ jeden Wert zwischen zwei Funktionswerten annimmt. Benutzen Sie anschließend die Aussage aus dem Beweis von Satz 4.9.)

(c) Zeigen Sie dass $\mathbb{R}$ homeomorph zu $(0,1)$ aber nicht zu $\mathbb{R}^2$ ist. (Tipp: $\mathbb{R}^2$ bleibt zusammenhängend, wenn ein Punkt entfernt wird.)