Abteilung für Angewandte Mathematik 02.05.2005
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis II

SS 2005 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 9. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f, g : M \to \mathbb{R}$ seien stetig. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \max(f,g) \,:\, M \to \mathbb{R} \text{ mit } \max(f,g)(x) &:= \max\big(f(x), g(x)\big), \\ \min(f,g) \,:\, M \to \mathbb{R} \text{ mit } \min(f,g)(x) &:= \min\big(f(x), g(x)\big) \end{aligned}$$

stetig sind.

Aufgabe 2: **12 Punkte**

Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ global Lipschitz-stetig, d. h. es existiert eine Konstante $L \geq 0$ mit $|G(x) - G(y)| \leq L\,|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Sei $b > 0$ fest.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes feste $\lambda > 0$ durch

$$\|f\|_{\max,\lambda} := \sup\big\{|f(x)|\, e^{-\lambda x} \,:\, x \in [0, b]\big\}$$

eine Norm auf $C([0, b])$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\max}$ und $\|\cdot\|_{\max,\lambda}$ äquivalent sind.

(b) Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : C([0, b]) \to C([0, b])$

$$(Tf)(x) := a_0 + \int_0^x G(f(y))\, dy$$

für geeignetes λ eine Kontraktion auf $C([0, b])$ bzgl. $\|\cdot\|_{\max,\lambda}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass T einen eindeutigen Fixpunkt f_0 hat. Zeigen Sie weiterhin, dass f_0 differenzierbar und Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$\begin{aligned} f'(y) &= G(f(y)) \quad \text{für } y \in [0, b], \\ f(0) &= a_0. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für zwei nichtleere Mengen $A, B \subset M$ sei $\hat{d}(A, B) := \inf\{d(a, b) \,:\, a \in A, b \in B\}$.

(a) Seien $A, B \subset M$ kompakt und nichtleer. Zeigen Sie, dass es Punkte $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ gibt mit $d(a_0, b_0) = \hat{d}(A, B)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus (a) nicht gilt, wenn man nur $A, B \subset M$ abgeschlossen voraussetzt, d. h. geben Sie ein Gegenbeispiel an.