Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

09.05.2005

Analysis II

SS 2005 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 23. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $A \subset M$ abgeschlossen und sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass der Graph von f

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

abgeschlossen in $M \times \mathbb{R}$ ist.

(b) Seien $L, K \subset M$ kompakt. Zeigen Sie, dass $L \times K$ kompakt in $M \times M$ ist. (Tipp: Benutzen Sie, dass Folgenkriterium für die Kompaktheit.)

(c) Seien $A, f, \operatorname{graph}(f)$ wie in Teil (a). Sei A zusätzlich kompakt. Zeigen Sie, dass $\operatorname{graph}(f)$ kompakt in $M \times \mathbb{R}$ ist. (Tipp: Benutzen Sie (a) und (b)).

Aufgabe 2: **14 Punkte**

Definition: Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $A \subset X$ mit $A \neq \emptyset$. Dann heißt A *wegzusammenhängend*, genau dann, wenn es für alle Punkte $x, y \in A$ eine stetigen Weg γ in A gibt, der x und y verbindet, d.h. es gibt eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to A$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

(a) Seien $A_1, A_2 \subset X$ wegzusammenhängend und $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $A_1 \cup A_2$ wieder wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede wegzusammenhängende Menge $A \subset X$ auch zusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie, das jeder offene Ball $B_r(x) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ wegzusammenhängend ist.

(d) Sei $A_3 \subset X$ offen und zusammenhängend und sei $x_3 \in A_3$. Sei A_4 gegeben durch $A_4 := \{y \in A_3 : \text{es existiert ein stetiger Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } A_3\}$. Dies ist die sogenannte *Wegzusammenhangskomponente von x_3 in A*. Zeigen Sie, dass A_4 wegzusammenhängend ist.

(e) Zeigen Sie mit (a) und (c), dass A_4 offen ist.

(f) Zeigen Sie mit (c), dass A_4 abgeschlossen in A_3 ist, d.h. für jede Folge $a_n \in A_4$ mit $a_n \to a \in A_3$ gilt $a \in A_4$.

(g) Folgen Sie, aus (e), (f) und dem Zusammenhang von A_3, dass schon $A_3 = A_4$ gilt.

(h) Sei $A_5 \subset X$ offen. Zeigen Sie, dass A_5 genau dann zusammenhängend ist, wenn A_5 wegzusammenhängend ist. (Tipp: (b) und (g).)