Abteilung für Angewandte Mathematik 30.05.2005
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis II

SS 2005 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 6. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Drücken Sie den Gradienten und den Laplace-Operator $\Delta := (\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2$ in $\mathbb{R}^2$ durch Polarkoordinaten aus, d. h. bzgl. $r \in (0,\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $(x,y) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Seien g definiert durch

$$g(x,y) = x\,y\,\ln(x^2+y^2) \qquad \text{für } (x,y) \neq 0.$$

Setzen Sie g falls möglich stetig in $(0,0)$ zu einer Funktion $\tilde{g}$ fort. Bestimmen Sie die Ableitungen und die Extrema von $\tilde{g}$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der n-dimensionale Laplace-Operator wird durch

$$\Delta \,:\, C^2(M,\mathbb{R}) \to C(M,\mathbb{R}) \,:\, u \mapsto \Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u$$

definiert. Die Funktion $u \in C^2(M,\mathbb{R})$ heißt harmonisch in M, falls $\Delta u = 0$ ist. Zeigen Sie, dass $g_n \,:\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$g_n(x) := \begin{cases} \ln|x|, & n = 2, \\ |x|^{2-n}, & n \neq 2, \end{cases}$$

harmonisch ist.