Abteilung für Angewandte Mathematik 13.06.2005
Prof. Dr. M. Růžička
Dr. L. Diening

Analysis II

SS 2005 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 20. Juni, vor der Vorlesung

Wir benötigen eine genauere Aufschlüsselung des Begriffs „gleichgradig stetig“:

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $M := \{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C(I)$. Die Menge M heißt *gleichgradig stetig im Punkt* x mit $x \in I$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ und für alle $\alpha \in A$ gilt: $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \varepsilon$. Die Menge M heißt *gleichgradig stetig*, falls M in allen Punkten $x \in I$ gleichgradig stetig ist.

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $M := \{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C(I)$. Die Menge M heißt *gleichmäßig gleichgradig stetig*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ und für alle $\alpha \in A$ gilt: $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \varepsilon$.

Aufgabe 1: 6 Punkte

Sei $M := \{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset C([a, b])$ gleichgradig stetig. Zeigen Sie, dass M schon gleichmäßig gleichgradig stetig ist. (Dies rechtfertigt die Benutzung des Begriffs „gleichgradig stetig“ statt „gleichmäßig gleichgradig stetig“ in Definition 12.7 der Vorlesung.)

Tipp: Benutzen Sie die gleichgradige Stetigkeit in jedem Punkt $x \in [a, b]$, um eine offene Überdeckung der kompakten Menge $[a, b]$ zu konstruieren.

Aufgabe 2: 8 Punkte

Überprüfen Sie, welche dieser Mengen $M \subset C(X)$ gleichgradig und gleichmäßig gleichgradig stetig sind:

(a) $X = [0, 1]$, $M := \{t \mapsto t^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $X = [0, 1)$, $M := \{t \mapsto t^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

(c) $X = [0, 1]$, $M := \left\{t \mapsto \frac{t^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(d) $X = [0, 2]$, $M := \left\{t \mapsto \frac{t^n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{f \in C^1([0, 1]) \,:\, \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 1\}$$

relativ kompakt in $C([0, 1])$ ist, d. h. jede Folge $f_n \in M$ hat eine in $C([0, 1])$ konvergente Teilfolge. Tipp: Arzelá-Ascoli.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M_2 := \{f \in C^2([0, 1]) \,:\, \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \leq 1\}$$

relativ kompakt in $C^1([0, 1])$ ist, d. h. jede Folge $f_n \in M_2$ hat eine in $C^1([0, 1])$ konvergente Teilfolge.