Michael Růžička

Analysis III

Skript WS 2009/10

Version 23. März 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Maße und messbare Funktionen

In diesem Kapitel werden zuerst die zentralen Begriffe der Maßtheorie, wie σ-Algebra, Maß, äußeres Maß, messbare Funktionen und messbare Mengen, eingeführt. Danach wird eine Methode zur Konstruktion äußerer Maße angegeben und die dafür notwendigen Konzepte und Begriffe eingeführt. Diese Methode wird später zur Konstruktion des Lebesguemaßes auf dem $\mathbb{R}^n$ angewendet. Weiterhin werden das Verhältniss von Maßen und äußeren Maßen geklärt und Konzepte zur Konstruktion von σ-Algebren eingeführt.

1.1 σ-Algebren und Maße

Wir beginnen mit der Untersuchung von Systemen von Teilmengen einer Menge X. Wir nennen die Menge aller Teilmengen von X die *Potenzmenge* einer Menge X, und bezeichnen sie mit $\mathcal{P}(X)$. Eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ wird in der Maßtheorie als *Mengensystem* bezeichnet, um den Ausdruck „Menge von Mengen" zu vermeiden.

1.1 Definition. *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt* σ-Algebra*, wenn*

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_i \in \mathcal{A}$ *für* $i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Das Paar $(X, \mathcal{A})$ *heißt* messbarer Raum.

Eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist auch unter abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen, das heißt es gilt

$$A_i \in \mathcal{A} \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

Dies folgt sofort aus der Darstellung $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} X \setminus A_i)$. Weiterhin liegt auch die *leere Menge* $\emptyset$ und die *Differenz* $A \setminus B$ zweier Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$, da $\emptyset = X \setminus X$ und $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$. Insbesondere ist eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ unter endlichen Durchschnitten und Vereinigungen abgeschlossen, da $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, und $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, wenn wir $A_i = \emptyset$ für $i > n$ setzen.

Beispiele. (i) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ und $\{\emptyset, X\}$ sind σ-Algebren.

(ii) Wir werden später sehen, dass die *messbaren Mengen* eines beliebigen äußeren Maßes eine σ-Algebra bilden (Satz 3.18). Dasselbe gilt für die *Lebesgue-messbaren Mengen* des $\mathbb{R}^n$ (Definition 6.2), da das Lebesguemaß ein äußeres Maß ist.

1.3 Satz. *Jeder Durchschnitt von (endlich oder unendlich vielen) σ-Algebren auf derselben Menge X ist wieder eine σ-Algebra.*

Beweis: Sei$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\sigma-$Algebren. Sei $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Somit folgt $A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Also auch $X \setminus A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$ woraus wir $X \setminus A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ folgern. Die Eigenschaften (i) und (iii) folgen analog. $\square$

Nicht jedes Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra, aber man kann aus $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra generieren.

1.4 Definition. *Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \textit{ ist } \sigma\textit{-Algebra in } X \textit{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}. \tag{1.5}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra*.*

Der Durchschnitt in (1.5) ist nichttrivial, da die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält. Aufgrund des Satzes 1.3 ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra. Offensichtlich gilt

$$\mathcal{A} \ \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}\,, \tag{1.6}$$

und somit ist $\sigma(\mathcal{E})$ die *kleinste* σ-Algebra die $\mathcal{E}$ enthält.

1.7 Beispiele. (i) Ist $E \subset X$ und $\mathcal{E} = \{E\}$, so gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, E, X \setminus E, X\}$.

(ii) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein *topologischer Raum*, d.h. $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ ist das System der *offenen Mengen*. Die von $\mathcal{O}$ erzeugte σ-Algebra heißt *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}(\mathcal{O})$, ihre Elemente heißen *Borelmengen*. Im Fall des $\mathbb{R}^n$ mit der kanonischen Topologie schreiben wir kurz $\mathcal{B}^n$.

(iii) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum, und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Das *Urbild* einer Menge $C \subset Y$ ist definiert durch $f^{-1}(C) := \{x \in X \,|\, f(x) \in C\}$. Auf Grund der Rechenregeln für Urbilder ist $f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \,|\, C \in \mathcal{C}\}$ offensichtlich eine σ-Algebra.

(iv) Sei $X \subset Y$ und sei $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum. Die Identität auf X, gegeben durch $id \colon X \to Y : x \to x$ induziert auf X durch $id^{-1}(\mathcal{C}) = \{X \cap A \,|\, A \in \mathcal{C}\}$ eine σ-Algebra. Diese nennt man *Spur-σ-Algebra auf* X.

(v) Sei X eine beliebige Menge und seien $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{P}(X)$, $i \in I$, Mengensysteme. Dann gilt: $\sigma\big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\big) = \sigma\big(\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\big)$. Offensichtlich gilt $\sigma\big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\big) \subset \sigma\big(\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)\big)$. Andererseits enthält $\sigma\big(\bigcup_{i\in I} \mathcal{E}_i\big)$ das System $\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{E}_i)$ und ist eine σ-Algebra. Die Behauptung folgt also aus (1.6).

Bevor wir ein Maß definieren können benötigen wir einige Vorbemerkungen zum Umgang mit den Symbolen $+\infty$ und $-\infty$. Auf der *erweiterten Zahlengeraden* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ sind die Ordnungsrelation $-\infty < a < \infty$ für $a \in \mathbb{R}$ und der Konvergenzbegriff auf naheliegende Weise gegeben.

1.8 Definition. *Eine Folge* $(s_k) \subset \overline{\mathbb{R}}$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) konvergiert gegen* $s \in \overline{\mathbb{R}}$*, falls eine der folgenden Alternativen gilt:*

(i) $s \in \mathbb{R}$*, und für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt* $s_k \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ *für* k *hinreichend groß.*

(ii) $s = \infty$*, und für jedes* $r \in \mathbb{R}$ *gilt* $s_k \in (r, \infty]$ *für* k *hinreichend groß.*

(iii) $s = -\infty$*, und für jedes* $r \in \mathbb{R}$ *gilt* $s_k \in [-\infty, r)$ *für* k *hinreichend groß.*

Eine Folge $(s_k) \subset \mathbb{R}$ ist genau dann in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent, wenn sie entweder in $\mathbb{R}$ konvergiert oder bestimmt gegen ∞ bzw. gegen $-\infty$ divergiert. Der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge, bzw. einer Reihe mit nichtnegativen Gliedern, ist also immer existent. Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann *offen*, wenn $U \cap \mathbb{R}$ offen ist und im Falle $+\infty \in U$ (bzw. $-\infty \in U$) ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $(a, \infty] \subset U$ (bzw. $[-\infty, a) \subset U$). Definitionsgemäß wird die Borel-σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch die offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ erzeugt. Man sieht sofort:

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ B \cup E \,\middle|\, B \in \mathcal{B}, \mathcal{E} \subset \{-\infty, +\infty\} \right\}.$$

Man beachte, dass die leere Menge $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist.

Die Addition wird wie folgt auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortgesetzt:

$+$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-$
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$+\infty$	$+\infty$

Schließlich verwenden wir die Vereinbarungen

$$\sup \emptyset := -\infty \qquad \text{und} \qquad \inf \emptyset := +\infty\,.$$

Diese sind konsistent mit der Tatsache, dass für Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ stets gilt:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf A \geq \inf B.$$

1.9 Definition. *Sei* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *eine* σ*-Algebra. Eine nichtnegative Mengenfunktion* $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *heißt* Maß *auf* $\mathcal{A}$*, falls*

(i) $\mu(\emptyset) = 0\,,$

(ii) *für beliebige paarweise disjunkte Mengen* $A_i \in \mathcal{A}$*,* $i \in \mathbb{N}$*, gilt:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\,. \tag{1.10}$$

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *wird als* Maßraum *bezeichnet.*

Die Eigenschaft (ii) wird σ-*Additivität* des Maßes μ genannt. Für endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$, folgt aus (ii), indem wir $A_i = \emptyset$ für $i > n$ setzen, die *endliche Additivität* des Maßes μ

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,.$$

Aus (i) und (ii) folgt sofort die *Monotonie* des Maßes μ, d.h.

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \subset B \qquad \Rightarrow \qquad \mu(A) \leq \mu(B)\,. \tag{1.11}$$

1.12 Definition. *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein* Maßraum. *Das Maß* μ *heißt* endlich *wenn* $\mu(A) < \infty$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$*, und* σ-endlich*, wenn es eine Folge* $(X_i) \subset \mathcal{A}$ *mit* $\mu(X_i) < \infty$ *gibt, so dass* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$*. Falls* $\mu(X) = 1$*, so wird* μ Wahrscheinlichkeitsmaß *genannt.*

1.13 Beispiel. Sei X eine beliebige Menge und sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Für einen Punkt $x \in X$ ist das zugehörige *Diracmaß* gegeben durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in X \setminus A\,. \end{cases}$$

Es gilt $\delta_x(A) \in \{0, 1\}$, $\delta_x(\emptyset) = 0$ und $\delta_x(X) = 1$ per Definition. Ist eine paarweise disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gegeben und ist $x \in A$, so folgt $x \in A_k$ für genau ein k. Hieraus folgt die Eigenschaft (1.10), denn für $x \notin A$ gilt ohnehin $\delta_x(A) = 0$. Also ist das Diracmaß ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

1.14 Beispiel. Auf einer beliebigen Menge X definieren wir das *Zählmaß* $\mathrm{card} : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch

$$\mathrm{card}(A) := \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

Für endliches $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ist die Eigenschaft (1.10) sofort klar. Sei also A unendlich und sei eine paarweise disjunkte Zerlegung $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gegeben. Entweder sind nur endlich viele A_k nichttrivial, dann muss eine der Mengen A_k unendlich sein, oder alle A_k sind nichttrivial. In beiden Fällen folgt sofort die Eigenschaft (1.10). Das Zählmaß ist σ-endlich genau dann, wenn X abzähbar ist, und endlich, wenn X endlich ist.

1.15 Beispiel. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für alle $M \subset X$ wird durch

$$\mathcal{A}|_M := \{A \cap M \mid A \in \mathcal{A}\}\,.$$

ein Mengensystem definiert. Mithilfe der de Morganschen Regeln sieht man sofort, dass $\mathcal{A}|_M$ eine σ-Algebra auf M ist. Man nennt $\mathcal{A}|_M \subset \mathcal{P}(M)$ die von

$\mathcal{A}$ *auf* M *induzierte* σ*-Algebra*. Falls $M \in \mathcal{A}$ definieren wir für alle $B \in \mathcal{A}|_M$, d.h. es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $B = A \cap M$,

$$\mu|_M(B) := \mu(A \cap M)\,.$$

Die Funktion $\mu|_M$ heißt *Einschränkung von* μ *auf* M. Man sieht leicht ein, dass $(M, \mathcal{A}|_M, \mu|_M)$ auch ein Maßraum ist.

1.16 Beispiel. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige σ-Algebra. Wir definieren das *triviale Maß* durch $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Offensichtlich ist μ ein endliches Maß.

1.17 Satz (Stetigkeitseigenschaften von Maßen). *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Dann gelten für Mengen* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, *folgende Aussagen:*

(i) *aus* $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \ldots$ *folgt* $\mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)\,,$

(ii) *aus* $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots,$ *mit* $\mu(A_1) < \infty$ *folgt* $\mu\big(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)\,,$

(iii) $\mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)\,.$

Beweis: (i) Die Folge $\tilde{A}_1 = A_1$, $\tilde{A}_k = A_k \setminus A_{k-1}$, $k \ge 2$ ist paarweise disjunkt und somit folgt mithilfe von (1.10)

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty \tilde{A}_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(\tilde{A}_i) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^k \tilde{A}_i\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)\,.$$

(ii) Für die aufsteigende Folge $A'_k = A_1 \setminus A_k$ gilt

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_k) + \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_k) + \mu(A'_k)\,.$$

Daraus folgt wegen (i)

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A'_k) &= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A'_i\Big) \\ &= \mu\Big(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^\infty A_i\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\Big)\,.\end{aligned}$$

(iii) Es genügt die Folge $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, $i \ge 2$ zu betrachten. Man sieht sofort, dass $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ und dass die Folge (B_i) paarweise disjunkt ist. Die Behauptung folgt somit aus (1.10) und der Monotonie (1.11). $\square$

Die Eigenschaft (i) nennt man *Stetigkeit von unten*, die Eigenschaft (ii) *Stetigkeit von oben*, und die Eigenschaft (iii) σ*-Subadditivität* des Maßes.

Die Bedingung $\mu(A_1) < \infty$ in (ii) kann natürlich durch $\mu(A_k) < \infty$ für ein k ersetzt werden. Sie kann aber nicht ganz weggelassen werden. Mit $A_k = \{k, k+1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ gilt zum Beispiel $\operatorname{card}(A_k) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\operatorname{card}(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

Wir wollen nun die Vollständigkeit von Maßen untersuchen.

1.18 Definition. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ nennen wir μ-*Nullmenge*. Das System aller Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mu)$. Das Maß μ heißt* vollständig, *wenn gilt:*

$$N \subset A \text{ für ein } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad N \in \mathcal{A} \text{ und } \mu(N) = 0\,. \tag{1.19}$$

Nicht jedes Maß ist vollständig, wie Beispiel 1.16 im Falle $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ zeigt. Allerdings kann man jedes Maß mithilfe der folgenden Konstruktion vervollständigen: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\mathcal{T}_\mu$ das System aller Mengen $N \subset X$ für die eine μ-Nullmenge $B \in \mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{A}$ existiert mit $N \subset B$. Wir bezeichnen mit

$$\overline{\mathcal{A}}_\mu := \big\{ A \cup N \,\big|\, A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{T}_\mu \big\}$$

die Erweiterung der σ-Algebra $\mathcal{A}$ um die Mengen aus $\mathcal{T}_\mu$. Offenbar ist μ genau dann vollständig, wenn $\mathcal{T}_\mu \subset \mathcal{A}$. Auf $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ definieren wir eine Mengenfunktion $\overline{\mu}$ durch

$$\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)\,, \qquad A \in \mathcal{A} \text{ und } N \in \mathcal{T}_\mu\,.$$

Offensichtlich hängt der Wert von $\overline{\mu}$ nicht von der Wahl von A und N ab. Man nennt $\overline{\mu}$ die *Vervollständigung von μ*.

1.20 Satz (Vervollständigung). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und $\overline{\mu}$ ein vollständiges Maß auf $\mathcal{A}_\mu$, welches mit μ auf $\mathcal{A}$ übereinstimmt.*

Beweis: Offensichtlich gilt $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}_\mu$. Man sieht sofort, dass $\mathcal{T}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist. Da dasselbe für $\mathcal{A}$ gilt, ist auch $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen. Für $E \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$ existieren $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{T}_\mu$ und $B \in \mathcal{A}$, mit $\mu(B) = 0$ und $N \subset B$, so dass $E = A \cup N$. Insbesondere ist $B \backslash N \in \mathcal{T}_\mu$ und somit gilt $X \backslash E = (X \backslash (A \cup B)) \cup (B \backslash (N \cup A)) \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$. Da $X \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$ ist also $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ eine σ-Algebra. Aufgrund der Definition von $\overline{\mu}$ sieht man leicht, dass $\overline{\mu}$ ein Maß ist. Sei $M \subset B = A \cup N$, mit $A \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{T}_\mu$, und $\overline{\mu}(B) = \mu(A) = 0$. Aus $M = (M \cap A) \cup (M \cap N) \in \mathcal{T}_\mu \cup \mathcal{T}_\mu$ folgt $M \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$, also ist $\overline{\mu}$ vollständig. Offenbar stimmen μ und $\overline{\mu}$ auf $\mathcal{A}$ überein. □

1.21 Satz (Eindeutigkeit der Vervollständigung). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(X, \overline{\mathcal{A}}_\nu, \overline{\mu})$ dessen Vervollständigung. Ferner sei $(X, \mathcal{B}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\overline{\mathcal{A}}_\mu \subset \mathcal{B}$ und $\overline{\mu} = \nu$ auf $\overline{\mathcal{A}}_\mu$.*

Beweis: Aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$ folgt sofort $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{N}(\nu)$ und somit auch $\mathcal{T}_\mu \subset \mathcal{T}_\nu$. Da ν vollständig ist, haben wir $\mathcal{T}_\nu \subset \mathcal{B}$. Also ist $\mathcal{T}_\mu \subset \mathcal{B}$ und somit auch $\overline{\mathcal{A}}_\mu \subset \mathcal{B}$ Da $\overline{\mu}$ auf $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ vollständig durch μ auf $\mathcal{A}$ bestimmt ist, folgt sofort $\overline{\mu} = \nu$ auf $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, da $\mu = \nu$ auf $\mathcal{A}$. □

1.2 Messbare Funktionen

In Analogie zur topologischen Definition stetiger Funktionen wollen wir nun messbare Funktionen definieren. Diese bilden den Grundbaustein der Integrationstheorie.

2.1 Definition. *Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar, falls $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$, d.h. falls für alle Elemente C der σ-Algebra $\mathcal{C}$ das Urbild $f^{-1}(C)$ in der σ-Algebra $\mathcal{A}$ liegt.*

Wir bezeichnen f auch kurz als messbar (bzw. $\mathcal{A}$-messbar), wenn über die zugrundeliegenden σ-Algebren $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{C}$) kein Zweifel besteht.

2.2 Beispiele. (i) Für beliebige messbare Räume $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{C})$ sind konstante Abbildungen, d.h. für ein beliebiges aber festes $y_0 \in Y$ ist $f\colon X \to Y$ gegeben durch $f(x) = y_0$, messbar.

(ii) Für beliebige Mengen $E \subset X$ heißt die Funktion $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in E\,, \\ 0 & \text{sonst}\ , \end{cases}$$

Indikatorfunktion von E (alternativ: charakteristische Funktion). Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$. Für beliebige messbare Räume $(X, \mathcal{A})$ ist die Indikatorfunktion χ_E genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $E \in \mathcal{A}$. Wir bemerken schon jetzt, dass Linearkombinationen von Indikatorfunktion der Grundbaustein des Lebesgueintegrales sein werden.

(iii) Die Komposition messbarer Abbildungen ist messbar. Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{C})$ und $(Z, \mathcal{D})$ messbare Räume. Seien $f\colon X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar und $g\colon Y \to Z$ $\mathcal{C}$-$\mathcal{D}$-messbar. Dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{D}$-messbar, da $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{D})) \subset f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

2.3 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Für beliebige Mengensysteme $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ gilt $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.*

Beweis: Auf Grund der Rechenregeln für Urbilder ist $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ offensichtlich eine σ-Algebra. Wegen $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ gilt somit auch $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Auf Grund der Rechenregeln für Urbilder zeigt man leicht, daß $\mathcal{F} := \{F \subset Y \mid f^{-1}(F) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra ist. Wegen $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt daher $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$, und nach Definition von $\mathcal{F}$ bedeutet dies $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. $\square$

Zum Nachweis der Meßbarkeit von Abbildungen wird häufig die folgende Folgerung verwendet.

2.4 Folgerung (Messbarkeitskriterium). *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{C})$ messbare Räume und sei $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{E})$. Jede Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-meßbar.*

Beweis: Aus dem vorherigen Lemma folgt sofort $f^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. □

2.5 Beispiele. (i) Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist $\mathcal{B}^n$-$\mathcal{B}^m$-meßbar. Man sagt auch, dass f *Borel-messbar* ist. Da Urbilder offener Mengen offen sind und die offenen Mengen die Borel-σ-Algebra generieren, folgt dies sofort aus der vorherigen Folgerung.

(ii) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum, und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Nach Beispiel 1.7 (iii) ist $f^{-1}(\mathcal{C})$ eine σ-Algebra. Offensichtlich ist $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(X)$ die kleinste σ-Algebra, die $f \colon X \to Y$ messbar macht. Wir nennen $f^{-1}(\mathcal{C})$ die durch f *und* $(Y, \mathcal{C})$ *auf* X *induzierte* σ*-Algebra.* Analog geht man für eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von Abbildungen $f_i : X \to Y_i$, wobei $X \neq \emptyset$, und $(Y_i, \mathcal{C}_i)$ messbare Räume sind, vor. Die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X derart, dass alle f_i $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}_i$-messbar sind, ist $\sigma(f_i \,|\, i \in I) := \sigma\big(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{C}_i)\big)$. Sie heißt die *von* $(f_i)_{i\in I}$ *auf* X *induzierte* σ*-Algebra.*

Bevor wir einen wichtigen Spezialfall genauer betrachten müssen wir noch die Multiplikation und die Division auf der erweiterten Zahlengeraden $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ erklären. Zusätzlich zu den Regeln in $\mathbb{R}$ folgendes vereinbart:

$$s \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot s = \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } s \in (0, \infty] \\ 0 & \text{falls } s = 0 \\ \mp\infty & \text{falls } s \in [-\infty, 0), \end{cases}$$

$$\frac{1}{t} = 0 \quad \text{für } t = \pm\infty.$$

Die Multiplikation $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist damit unstetig in den vier Punkten $\{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\}$, aber die Vereinbarung $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ erweist sich bei der Definition des Integrals als praktisch. Nicht definiert ist nach wie vor die Division durch Null.

2.6 Definition. *Sei* $(X, \mathcal{A})$ *ein messbarer Raum und* $D \in \mathcal{A}$*. Eine Funktion* $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt* numerische Funktion.

Natürlich sind Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$, d.h. $f : D \to \mathbb{R}$, ein Spezialfall numerischer Funktionen. Deshalb werden wir oft nur von Funktionen anstatt von numerischen Funktionen sprechen. Die erweiterte Zahlengerade versehen wir mit der Borel-σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}}$. Numerische Funktionen $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum ist und $D \in \mathcal{A}$, sind per Definition $\mathcal{A}$-*messbar (auf* D*)*, wenn $f^{-1}(\overline{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{A}|_D$, wobei $\mathcal{A}|_D$ die von $\mathcal{A}$ auf D induzierte σ-Algebra ist. Das nächste Lemma ist nützlich, um die Messbarkeit von (numerischen) Funktionen nachzuweisen.

2.7 Lemma (Messbarkeitskriterium). *Sei* $(X, \mathcal{A})$ *ein messbarer Raum,* $D \in \mathcal{A}$ *und* $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist $\mathcal{A}$-messbar.*

(ii) *Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ und die Mengen $f^{-1}(\{\infty\})$, $f^{-1}(\{-\infty\})$ liegen in $\mathcal{A}$.*

(iii) $\{f \leq s\} := \{x \in D \,|\, f(x) \in [-\infty, s]\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$.

(iv) $\{f < s\} := \{x \in D \,|\, f(x) \in [-\infty, s)\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$.

(v) $\{f \geq s\} := \{x \in D \,|\, f(x) \in [s, \infty]\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$.

(vi) $\{f > s\} := \{x \in D \,|\, f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: Da die Borel-σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}}$ durch offene Mengen in $\mathbb{R}$ sowie $\pm\infty$ generiert wird, sind die Behauptungen (i) und (ii) sind aufgrund von Folgerung 2.4 und der Definition von $\mathcal{A}$-messbar äquivalent.

Aus (ii) folgt (vi) wegen $\{f > s\} = f^{-1}(s, \infty) \cup f^{-1}\{\infty\}$. Aus den folgenden Gleichungen ergibt sich, dass (iii) bis (vi) untereinander äquivalent sind:

$$\{f \leq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < s + \frac{1}{k}\}, \ \{f > s\} = X \setminus \{f \leq s\},$$
$$\{f \geq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > s - \frac{1}{k}\}, \ \{f < s\} = D \setminus \{f \geq s\}.$$

Es gelte nun eine und damit jede der Aussagen (iii) bis (vi). Für ein offenes Intervall (a, b) ist dann $f^{-1}((a, b)) = \{f > a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{A}$. Man kann zeigen, dass sich jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ von offenen Intervallen $I_k = (a_k, b_k)$ darstellen lässt. Also ist $f^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(I_k) \in \mathcal{A}$. Ferner haben wir

$$f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > k\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < -k\}.$$

Also erfüllt f (ii). □

Man überlegt sich leicht, dass es ausreicht die Bedingungen (iii)–(vi) aus Lemma 2.7 für $s \in \mathbb{Q}$ anstatt $s \in \mathbb{R}$ zu formulieren, denn es gilt z.B. $\{f \geq s\} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}, s > q} \{f > q\}$.

2.8 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und seien $f, g \colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar. Dann sind die Mengen $\{f < g\} := \{x \in D \,|\, f(x) < g(x)\}$ und $\{f \leq g\} := \{x \in D \,|\, f(x) \leq g(x)\}$ Elemente aus $\mathcal{A}$.*

Beweis: Die Behauptungen folgen aus den Darstellungen $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{g > q\})$ und $\{f \leq g\} = D \setminus \{f > g\}$. □

In folgendem Satz sind die Grenzfunktionen punktweise definiert, zum Beispiel ist $\liminf_{k \to \infty} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert durch

$$(\liminf_{k \to \infty} f_k)(x) := \liminf_{k \to \infty} f_k(x).$$

Punktweise Konvergenz ist eine sehr schwache Form der Konvergenz, unter der sich Eigenschaften wie Stetigkeit oder Integrierbarkeit nicht notwendig auf den Grenzwert übertragen.

2.9 Satz (Grenzwerte messbarer Funktionen). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$ und seien $f_k : D \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge von $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar:*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \liminf_{k\to\infty} f_k,\ \limsup_{k\to\infty} f_k.$$

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\inf_k f_k \geq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \geq s\}\,, \quad \{\sup_k f_k \leq s\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \leq s\}.$$

Nach Lemma 2.7 sind die Funktionen $\inf_k f_k$ und $\sup_k f_k$ also messbar, und damit auch die Funktionen

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \big(\inf_{l\geq k} f_l\big)\,, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \big(\sup_{l\geq k} f_l\big)\,. \qquad \square$$

Sei $D \in \mathcal{A}$. Für eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ ist der *Positiv*- bzw. *Negativanteil* $f^{\pm} : D \to [0, \infty]$ definiert durch

$$f^+ := \max(f, 0) \geq 0 \quad \text{und} \quad f^- := \max(-f, 0) = -\min(f, 0) \geq 0. \tag{2.10}$$

Es gilt also $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

2.11 Satz (Messbarkeit und Rechenoperationen). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $D \in \mathcal{A}$, $f, g : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-messbar und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch folgende Funktionen $\mathcal{A}$-messbar, falls sie definiert sind und ihr Definitionsbereich in $\mathcal{A}$ liegt:*

$$f + g,\ \alpha f,\ f^{\pm},\ \max(f, g),\ \min(f, g), |f|,\ fg,\ f/g\,.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass f, g nur Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. Es gilt

$$\{f + g < t\} = \bigcup_{r,s\in\mathbb{Q},\, r+s<t} \{f < r\} \cap \{g < s\}, \quad \{-f < t\} = \{f > -t\}.$$

Also sind $f + g$ und $-f$ messbar, ebenso αf für $\alpha \in \mathbb{R}$. Für jede stetige Funktion $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ ist die Verkettung $\varphi \circ f$ messbar, denn für $U \subset \mathbb{R}$ offen ist $\varphi^{-1}(U)$ offen und folglich $(\varphi \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \in \mathcal{A}$. Damit ergibt sich die Messbarkeit der Funktionen $f^{\pm}$, indem wir $\varphi(s) = \max(\pm s, 0)$ wählen. Weiter sind dann die Funktionen

$$|f| = f^+ + f^-,\ \max(f, g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \ \text{und}\ \min(f, g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

messbar. Nun ist $f^2 = \varphi \circ f$ mit $\varphi(s) = s^2$, also folgt die Messbarkeit von f^2 und von

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big).$$

Schließlich ist auch $1/g$ messbar, denn

$$\{1/g < s\} = \begin{cases} \{1/s < g < 0\} & s < 0 \\ \{g < 0\} & s = 0 \\ \{g < 0\} \cup \{g > 1/s\} & s > 0. \end{cases}$$

Nimmt nun f (bzw. g) den Wert ∞ oder $-\infty$ an, so betrachte die abgeschnittene Funktion

$$f_k(x) = \begin{cases} k & f(x) \geq k \\ -k & f(x) \leq -k \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen f_k, g_k sind messbar. Man prüft nach, dass die Funktionen

$$f_k + g_k,\ \alpha f_k,\ f_k^{\pm},\ \max(f_k, g_k),\ \min(f_k, g_k), |f_k|,\ f_k g_k,\ f_k/g_k$$

punktweise gegen die entsprechenden Funktionen für f und g konvergieren, auch im Fall des (unstetigen) Produkts. Also folgt die allgemeine Behauptung aus Satz 2.9. $\square$

Wir betrachten nun den Fall, dass auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ ein Maß gegeben ist, d.h. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Maßraum. Die folgende Beobachtung spielt in der Maß- und Integrationstheorie eine große Rolle. Es kommt oft vor, dass eine Aussage nur für Punkte außerhalb einer μ-Nullmenge gebraucht wird oder gezeigt werden kann. Es ist z.B. intuitiv klar, dass Nullmengen für die Integration unwichtig sind. Um diese und ähnliche Aussagen fassbar zu machen wird das folgende Konzept eingeführt:
Man sagt, die Aussage $A[x]$ ist wahr für *μ-fast-alle $x \in M$* oder *μ-fast-überall auf M*, falls es eine μ-Nullmenge N gibt mit

$$\{x \in M \mid A[x] \text{ ist falsch}\} \subset N.$$

Dabei wird nicht verlangt, dass $\{x \in X \mid A[x] \text{ ist falsch}\}$ selbst zu $\mathcal{A}$ gehört. Zum Beispiel bedeutet für Funktionen $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ die Aussage „$f(x) \leq g(x)$ für μ-fast-alle $x \in X$“, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass für alle Punkte $x \in X \setminus N$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt. Eine Funktion h ist „μ-fast-überall auf X definiert“, wenn h auf $D \in \mathcal{A}$ definiert ist und $\mu(X \setminus D) = 0$. Ein weiteres Beispiel ist „die Konvergenz μ-fast-überall“: eine Folge von Funktionen $f_k\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise μ-fast-überall gegen $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass für alle $x \in D \setminus N$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)\,.$$

Wir wollen nun den Begriff der Messbarkeit auf Funktionen f, die nur μ-fast-überall definiert sind, ausweiten.

2.12 Definition. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine auf $D \in \mathcal{A}$ definierte numerische Funktion f heißt* μ-messbar (auf X), *wenn $\mu(X \setminus D) = 0$ und f $\mathcal{A}|_D$-messbar ist.*

2.13 Bemerkung. Wir unterscheiden zwischen $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen (auf X), die *überall* auf X definiert sind, und μ-messbaren Funktionen (auf X), die in der Regel nur *μ-fast-überall* auf X definiert sind.

2.14 Bemerkung. Die Relation „$f = g$ μ-fast-überall" ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen (oder aller μ-messbaren Funktionen) auf X. Sei $D \in \mathcal{A}$ und $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-messbar. Dann gibt es eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f = g$ auf D. Insbesondere kann man

$$g = \begin{cases} f & \text{auf } D\,, \\ 0 & \text{auf } X \setminus D\,, \end{cases}$$

wählen. Somit übertragen sich insbesondere die Sätze 2.9 und 2.11 auf μ-messbare Funktionen, wobei man zusätzlich fordern muss, dass $f + g$, fg und f/g μ-fast-überall definiert sind.

2.15 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und sei f μ-messbar auf X. Dann ist auch jede Funktion $\widetilde{f}$ mit $\widetilde{f} = f$ μ-fast-überall μ-messbar.*

Beweis: Sei f auf $D \in \mathcal{A}$ definiert mit $\mu(X \setminus D) = 0$ und sei $\widetilde{f}$ auf $\widetilde{D} \subset X$ definiert. Aus den Voraussetzungen folgt, dass es eine Nullmenge N gibt, so dass $\widetilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Insbesondere ist $X \setminus N \subset D \cap \widetilde{D}$. Also ist $X \setminus \widetilde{D} \subset N$, und da μ vollständig ist, folgt $\widetilde{D} \in \mathcal{A}$. Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \{x \in \widetilde{D} \,|\, \widetilde{f}(x) < s\} &= \{x \in \widetilde{D} \cap N \,|\, \widetilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in \widetilde{D} \cap (X \setminus N) \,|\, \widetilde{f}(x) < s\} \\ &= \{x \in \widetilde{D} \cap N \,|\, \widetilde{f}(x) < s\} \cup \{x \in X \setminus N \,|\, f(x) < s\} \\ &= \{x \in \widetilde{D} \cap N \,|\, \widetilde{f}(x) < s\} \cup \\ &\qquad \cup \big(\{x \in D \,|\, f(x) < s\} \setminus \{x \in D \cap N \,|\, f(x) < s\}\big)\,. \end{aligned}$$

Da f μ-messbar ist und μ ein vollständiges Maß ist, erhalten wir, dass die rechte Seite in $\mathcal{A}$ liegt. Da sie außerdem eine Teilmenge von $\widetilde{D}$ ist, liegt sie in $\mathcal{A}|_{\widetilde{D}}$ und somit ist $\widetilde{f}$ μ-messbar. □

2.16 Satz (Grenzwert μ-messbarer Funktionen). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und seien f_k, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar. Falls f_k punktweise μ-fast-überall gegen f konvergiert, dann ist f μ-messbar.*

Beweis: Sei f_k auf $D_k \in \mathcal{A}$ definiert. Dann sind alle f_k, $k \in \mathbb{N}$, auf D definiert, wobei $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$ und $X \setminus D$ eine Nullmenge ist. Setze $E := \{x \in D \,|\, \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \neq f(x)\}$ und betrachte

$$\widetilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & \text{falls } x \in D \setminus E\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases} \qquad \text{sowie} \qquad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \setminus E\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Es gilt $\widetilde{f} = \lim_{k\to\infty} \widetilde{f}_k$, also ist $\widetilde{f}$ nach Satz 2.9 $\mathcal{A}$-messbar. Aber nach Voraussetzung ist $(X \setminus D) \cup E$ eine μ-Nullmenge, also folgt die Messbarkeit von f aus Lemma 2.15. □

Der folgende Satz zeigt, dass μ-fast-überall Konvergenz einer Folge bis auf kleine Mengen bereits gleichmäßige Konvergenz impliziert.

2.17 Satz (Egorov). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $D \in \mathcal{A}$ eine Menge mit $\mu(D) < \infty$ und seien f_n, f $\mu|_D$-messbare, $\mu|_D$-fast-überall endliche Funktionen mit $f_n \to f$ $\mu|_D$-fast-überall. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $B \subseteq D$, $B \in \mathcal{A}$ mit*

(i) $\mu(D \setminus B) < \varepsilon$,

(ii) $f_k \rightrightarrows f$ *gleichmäßig auf* B.

Beweis: Sei $E := \{x \in D \,|\, f_n(x), f(x) \text{ sind endlich und } f_n(x) \to f(x)\}$. Auf Grund der Voraussetzungen ist $\mu(D \setminus E) = 0$ und wir können OBdA annehmen, dass $D = E$. Sei $C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty}\{x \in D \,|\, |f_k(x) - f(x)| > 2^{-i}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Dann liegen aufgrund von Satz 2.11 die Mengen $C_{i,j}$ in $\mathcal{A}$ und es gilt $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Da $\mu(D) < \infty$ erhalten wir mit Satz 1.17 (ii) und der Konvergenz $f_n \to f$ auf D, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j\to\infty} \mu(C_{i,j}) = \mu\Bigg(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\Bigg) = 0\,.$$

Also gibt es ein $N(i)$ mit $\mu(C_{i,N(i)}) < \varepsilon 2^{-i}$. Wir setzen $B := D \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)} \in \mathcal{A}$ und erhalten

$$\mu(D \setminus B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,N(i)}) < \varepsilon\,.$$

Für alle i, alle $x \in B$ und alle $n > N(i)$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \le 2^{-i}\,,$$

d.h. $f_n \rightrightarrows f$ auf B. □

1.3 Äußere Maße

Äußere Maße sind immer auf der gesamten Potenzmenge definiert. Sie ordnen also jeder Teilmenge eine Maßzahl zu. Allerdings gelten vernünftige Rechenregeln (σ-Additivität) nur auf einem Teilsystem.

3.1 Definition. *Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt* äußeres Maß *auf X, falls*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{3.2}$$

Oft spricht man der Kürze halber auch von einem Maß, wenn keine Missverständnisse entstehen können (vgl. Definition 1.9). Die Begriffe *σ-additiv, σ-subadditiv, σ-endlich, endlich*, *monoton*, sowie *Nullmenge* und *μ-fast-überall* werden für äußere Maße analog zu den entsprechenden Begriffen für Maße definiert (man ersetzt in den entsprechenden Definitionen $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{P}(X)$).

Ein äußeres Maß ist monoton, σ-subadditiv, und insbesondere (endlich) *subadditiv*, d.h.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,.$$

3.3 Definition. *Sei μ äußeres Maß auf X. Die Menge $A \subset X$ heißt μ-*messbar*, falls für alle $S \subset X$*

$$\mu(S) \ge \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)\,. \tag{3.4}$$

Das System aller μ–messbaren Mengen wird mit $\mathcal{M}(\mu)$ bezeichnet.

Da $S = (S \cap A) \cup (S \setminus A)$, folgt aus (3.2) die umgekehrte Ungleichung in (3.4), das heißt es gilt:

$$A \text{ messbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \quad \forall S \subset X. \tag{3.5}$$

Wir wollen nun ein paar einfache Beispiele und Methoden zur Konstruktion von äußerem Maßen betrachten.

3.6 Beispiel. Jedes auf $\mathcal{P}(X)$ definierte Maß ist ein äußeres Maß. Dies folgt sofort aus Satz 1.17 (iii). Insbesondere sind also das im Beispiel 1.13 definierte Diracmaß und das im Beispiel 1.14 definierte Zählmaß äußere Maße.

3.7 Satz. *Sei $\mathcal{Q}$ ein System von Teilmengen einer Menge X, dass die leere Menge $\emptyset$ enthält, und sei $\lambda\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{Q}$ mit $\lambda(\emptyset) = 0$. Definiere die Mengnefunktion $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ für beliebige $E \subset X$ durch*

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \,\Big|\, P_i \in \mathcal{Q},\, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \right\}. \tag{3.8}$$

Man beachte $\inf \emptyset = \infty$. *Dann ist μ ein äußeres Maß.*

Beweis: Mit $\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{Q}$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$ nach (3.8). Sei $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E, E_i \subset X$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \infty$. Wähle Überdeckungen $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_{i,j}$ mit $P_{i,j} \in \mathcal{Q}$, so dass zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(P_{i,j}) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt $E \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} P_{i,j}$ und somit

$$\mu(E) \le \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda(P_{i,j}) \le \sum_{i=1}^{\infty} \big(\mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt $\mu(E) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. □

3.9 Satz (Bildmaß). *Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Für ein gegebenes äußeres Maß $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ erhält man durch*

$$f(\mu) : \mathcal{P}(Y) \to [0,\infty]\,, \qquad f(\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B))$$

ein äußeres Maß $f(\mu)$ auf Y, welches wir Bildmaß von μ unter f *nennen. Es gilt für alle $B \subset Y$*

$$f^{-1}(B) \ \mu\text{-messbar} \quad \Rightarrow \quad B \ f(\mu)\text{-messbar}\,. \tag{3.10}$$

Beweis: Für $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ gilt $f^{-1}(B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$ und folglich aufgrund der σ-Subadditivität von μ

$$f(\mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(f^{-1}(B_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\mu)(B_i).$$

Außerdem ist trivialerweise $f(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Also ist $f(\mu)$ ein äußeres Maß. Nun ist nach Definition von $f(\mu)$ die Menge $B \subset Y$ genau dann $f(\mu)$-messbar, wenn für alle $T \subset Y$

$$\mu(f^{-1}(T)) \ge \mu(f^{-1}(T \cap B)) + \mu(f^{-1}(T \setminus B))\,.$$

Da $f^{-1}(T \cap B) = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)$ sowie $f^{-1}(T \setminus B) = f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(B)$, ist dies äquivalent zu

$$\mu(f^{-1}(T)) \ge \mu(f^{-1}(T) \cap f^{-1}(B)) + \mu(f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(B)) \quad \text{für alle } T \subset Y.$$

Dagegen ist $f^{-1}(B)$ genau dann μ-messbar, wenn für alle $S \subset X$

$$\mu(S) \ge \mu(S \cap f^{-1}(B)) + \mu(S \setminus f^{-1}(B))\,.$$

Also folgt die Behauptung (3.10), indem wir $S = f^{-1}(T)$ setzen. □

Die im folgenden Satz definierte Einschränkung für äußere Maße ist etwas anders definiert als der analoge Begriff für Maße (vgl. Beispiel 1.15). Deshalb benutzen wir auch ein anderes Symbol. Man beachte insbesondere, dass die Einschränkung eines äußeren Maßes auf X auf die Menge $M \subset X$ wieder eines äußeres Maß auf X ist.

3.11 Satz (Einschränkung). *Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß auf X. Für eine gegebene Menge $M \subset X$ erhält man durch*

$$\mu \llcorner M : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]\,, \qquad \mu \llcorner M(A) := \mu(A \cap M)$$

ein äußeres Maß $\mu \llcorner M$ auf X, welches wir Einschränkung von μ auf M *nennen. Es gilt*

$$A \ \mu\text{-messbar} \quad \Rightarrow \quad A \ \mu \llcorner M\text{-messbar}. \tag{3.12}$$

Beweis: Aus der Definition folgt sofort, dass $\mu \llcorner M$ ein äußeres Maß ist. Weiter gilt für $A \subset X$ μ-messbar und $S \subset X$ beliebig

$$\begin{aligned}\mu \llcorner M(S) &= \mu(S \cap M)\\ &\geq \mu((S \cap M) \cap A) + \mu((S \cap M) \setminus A)\\ &= \mu((S \cap A) \cap M) + \mu((S \setminus A) \cap M)\\ &= \mu \llcorner M(S \cap A) + \mu \llcorner M(S \setminus A).\end{aligned}$$

Dies beweist Behauptung (3.12). □

Wir wollen nun die Struktur des Systems $\mathcal{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen untersuchen.

3.13 Satz (Messbarkeit von Nullmengen). *Sei μ äußeres Maß auf X. Dann gilt:*

$$N \ \mu\text{-Nullmenge} \quad \Rightarrow \quad N \ \mu\text{-messbar} \tag{3.14}$$

$$N_1, N_2, \ldots \ \mu\text{-Nullmengen} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \ \mu\text{-Nullmenge.} \tag{3.15}$$

Beweis: Sei $\mu(N) = 0$. Für $S \subset X$ folgt aus der Monotonie $\mu(S \cap N) \leq \mu(N) = 0$, also

$$\mu(S) \geq \mu(S \setminus N) = \mu(S \cap N) + \mu(S \setminus N)\,.$$

Die zweite Aussage gilt auf Grund der σ-Subadditivität von μ. □

Auf jeden Fall enthält $\mathcal{M}(\mu)$ alle Nullmengen $N \subset X$, und damit auch deren Komplemente $X \setminus N$, wie unten in Beweis von Satz 3.18 gezeigt wird. Es kann sein, dass keine anderen Mengen messbar sind, wie das folgende Beispiel 3.16, in dem $\mathcal{M}(\mu) = \{\emptyset, X\}$ ist, zeigt. Aber in den relevanten Fällen erwarten wir doch, dass es viele weitere messbare Mengen gibt. Insbesondere bildet das System $\mathcal{M}(\mu)$ eine σ-Algebra, wie im Satz 3.18 bewiesen wird.

3.16 Beispiel. Auf jeder Menge X können wir durch

$$\beta(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ein äußeres Maß β definieren. Der Nachweis von (3.2) für β ist trivial. Es sind nur $\emptyset$ und X β-messbar, denn mit der Wahl $S = X$ in (3.4) folgt, falls $A \subset X$ β-messbar ist,

$$1 \geq \beta(X) = \beta(A) + \beta(X \setminus A).$$

Bevor wir Satz 3.18 beweisen, benötigen wir noch folgendes Lemma.

3.17 Lemma. *Seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i = 1, \dots, k$, paarweise disjunkt und μ-messbar. Dann gilt für alle $S \subset X$*

$$\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)\,.$$

Beweis: Für $k = 1$ ist die Aussage trivial, und für $k \geq 2$ folgt induktiv, da A_k μ-messbar,

$$\begin{aligned}
\mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) &= \mu\big((S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap A_k\big) + \mu\big((S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \setminus A_k\big) \\
&= \mu(S \cap A_k) + \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i)\,.
\end{aligned}$$

□

3.18 Satz (äußeres Maß ⇒ Maß). *Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Dann ist das System $\mathcal{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen eine σ-Algebra, und μ ist ein vollständiges Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.*

Beweis: (i) Zuerst zeigen wir, dass endliche Durchschnitte und Vereinigungen μ-messbarer Mengen wieder μ-messbar sind.

Es gilt $X \in \mathcal{M}$, denn für jede Menge $S \subset X$ ist

$$\mu(S \cap X) + \mu(S \setminus X) = \mu(S) + \mu(\emptyset) = \mu(S).$$

Mit $A \in \mathcal{M}$ folgt auch $X \setminus A \in \mathcal{M}$, denn für $S \subset X$ gilt

$$\mu\big(S \cap (X \setminus A)\big) + \mu\big(S \setminus (X \setminus A)\big) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A) = \mu(S).$$

Als nächstes zeigen wir, dass $A \cap B \in \mathcal{M}$ für $A, B \in \mathcal{M}$. Für alle $S \subset X$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu(S) &= \mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A)\,, \\
\mu(S \cap A) &= \mu(S \cap A \cap B) + \mu((S \cap A) \setminus B)\,.
\end{aligned}$$

Wenn man $S \setminus (A \cap B)$ als Testmenge wählt und die Messbarkeit von A benutzt erhält man:

$$\begin{aligned}
\mu(S \setminus (A \cap B)) &= \mu((S \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu((S \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\
&= \mu((S \cap A) \setminus B) + \mu(S \setminus A)\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen drei Identitäten folgt sofort

$$\mu(S) = \mu(S \cap (A \cap B)) + \mu(S \setminus (A \cap B))\,.$$

Hieraus folgt, dass auch Vereinigungen und Differenzen messbarer Mengen messbar sind, da $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \in \mathcal{M}$ und $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}$. Per Induktion erhalten wir, dass $\mathcal{M}$ unter endlichen Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen ist.

(ii) Jetzt zeigen wir, dass μ σ-additiv auf $\mathcal{M}$ ist.

Seien A_j, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte μ–messbare Mengen. Wählt man $S = A_1 \cup A_2$ und benutzt die Messbarkeit von A_1 erhält man

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)\,,$$

und per Induktion die analoge Aussage für endliche disjunkte Vereinigungen. Also gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\,,$$

wobei wir die Monotonie von μ benutzt haben. Die umgekehrte Ungleichung gilt aufgrund von (3.2) immer, und somit haben wir die σ-Additivität von μ auf $\mathcal{M}$ bewiesen.

(iii) Als letztes zeigen wir, dass $\mathcal{M}$ abgeschlosssen unter abzählbaren Vereinigungen ist.

Seien A_j, $j \in \mathbb{N}$, μ–messbare Mengen. Wir können annehmen, dass A_j paarweise disjunkt sind, andernfalls betrachten wir $\tilde{A}_i = A_i \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1})$. Für $S \subset X$ beliebig folgt, da $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{M}$,

$$\mu(S) = \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\,.$$

Im zweiten Schritt wurden dabei Lemma 3.17 und die Monotonie von μ benutzt. Mit $k \to \infty$ erhalten wir schließlich wegen der σ-Subadditivität von μ auf $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned}\mu(S) &\ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(S \cap A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \ge \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (S \cap A_i)\big) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \\ &= \mu(S \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu(S \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\,.\end{aligned}$$

Also ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ μ-messbar.

Die Vollständigkeit von μ wurde schon in Satz 3.13 bewiesen. □

Aus dem gerade bewiesenen Satz und Satz 1.17 folgt:

3.19 Folgerung (Stetigkeitseigenschaften von äußeren Maßen). *Sei μ ein äußeres Maß und seien $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$, $i \in \mathbb{N}$, μ-messbare Mengen. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *aus* $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \ldots$ *folgt* $\mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$,

(ii) *aus* $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots$, *mit* $\mu(A_1) < \infty$ *folgt* $\mu\big(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$,

1.4 Der Fortsetzungssatz von Carathéodory

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass man aus äußeren Maßen in natürlicher Weise Maße konstruieren kann. Jetzt wollen wir eine abstrakte Methode zur Konstruktion äußerer Maße vorstellen.

4.1 Definition. *Ein Mengensystem* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *heißt* $\cup$-stabil (bzw. $\cap$-stabil)*, wenn* $A \cup B \in \mathcal{A}$ (*bzw.* $A \cap B \in \mathcal{A}$) *für alle* $A, B \in \mathcal{A}$.

Offensichtlich impliziert $\cup$- bzw. $\cap$-Stabilität eines Systems die Stabilität bzgl. endlicher Vereinigungen bzw. Durchschnitte. Die $\setminus$-*Stabilität* ist analog definiert.

4.2 Definition. *Ein Mengensystem* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *heißt* Ring *über* X*, falls*

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{R}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ *heißt* Algebra*, falls zusätzlich* $X \in \mathcal{R}$.

4.3 Beispiele. (i) Für $A \subset X$ ist $\{\emptyset, A\}$ eine Ring, aber für $A \neq X$ keine Algebra. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra.

(ii) Das System aller endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge ist ein Ring. Dasselbe gilt für das System aller (höchstens) abzählbaren Mengen. Eine Menge heißt *abzählbar*, wenn es eine Bijektion auf eine Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gibt.

Für zwei Mengen A, B in einem Ring $\mathcal{R}$ liegt auch der Duchschnitt wieder in $\mathcal{R}$, denn es gilt $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$. Ringe sind $\cup$-stabil, $\cap$-stabil und $\setminus$-stabil. Algebren sind zusätzlich stabil bzgl. Komplementsbildung $X \setminus A$. Satz 1.3 über Durchschnitte von σ-Algebren gilt analog für Ringe und Algebren. Also kann man wie für σ-Algebren *erzeugte Ringe* und *erzeugte Algebren* definieren.

4.4 Definition. *Sei* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ *ein Ring. Eine Funktion* $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ *heißt* Prämaß *auf dem Ring* $\mathcal{R}$*, wenn*

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$,

(ii) *für paarweise disjunkte Mengen* $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$, *mit* $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{R}$ *gilt:*

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i) \qquad (\sigma\text{-}\textit{Additivität auf } \mathcal{R}).$$

Die Begriffe *σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich, monoton*, sowie *Nullmenge* und *fast überall* werden für Prämaße analog zu den entsprechenden Begriffen für Maße definiert.

Beispiele. (i) Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X und setze

$$\lambda(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset\,, \\ \infty & \text{falls } \emptyset \neq A \in \mathcal{R}\,. \end{cases}$$

Offensichtlich ist λ ein Prämaß.

(ii) Sei $\mathcal{R}$ der Ring aller endlichen Teilmengen einer beliebigen Menge X und sei $\lambda = \mathrm{card}|_{\mathcal{R}}$ die Einschränkung des Zählmaßes auf $\mathcal{R}$. Dann ist λ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.

Alle Maße, und insbesondere die Einschränkung eines äußeren Maßes auf die messbaren Mengen $\mathcal{M}(\mu)$, sind natürlich Prämaße. Wir wollen nun zeigen, dass man ein Prämaß zu einem äußeren Maß fortsetzen kann.

4.5 Definition. *Sei λ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Ein äußeres Maß μ auf X (bzw. ein Maß μ auf $\mathcal{A}$) heißt* Fortsetzung von λ, *falls folgende zwei Bedingungen gelten:*

(i) *$\mu|_{\mathcal{R}} = \lambda$, d.h. $\mu(A) = \lambda(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$*

(ii) *$\mathcal{R} \subset \mathcal{M}(\mu)$, d.h. alle Mengen in $\mathcal{R}$ sind μ-messbar (bzw. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$).*

4.6 Satz (Caratheodory-Fortsetzung). *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das in Satz 3.7 aus $\mathcal{R}$ konstruierte äußere Maß, d.h. für alle $E \subset X$ ist*

$$\mu(E) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) : A_i \in \mathcal{R},\, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}.$$

Dann ist μ eine Fortsetzung *von λ. Man bezeichnet μ* als das durch λ induzierte, äußere Maß *oder als* Carathéodory-Fortsetzung von λ.

BEWEIS: (i) $\mu(A) = \lambda(A)$ *für* $A \in \mathcal{R}$.
Die Ungleichung $\mu(A) \leq \lambda(A)$ folgt direkt aus der Definition von μ, indem wir $A_1 = A$ und $A_i = \emptyset$ für $i \geq 2$ wählen. Für die umgekehrte Ungleichung $\lambda(A) \leq \mu(A)$ reicht es zu zeigen:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ mit } A_i \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i).$$

Wir betrachten die paarweise disjunkten Mengen $B_i = (A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j) \cap A \in \mathcal{R}$ und schließen

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i),$$

da λ Prämaß und $B_i \subset A_i$.

(ii) *Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ-messbar.*
Sei $A \in \mathcal{R}$ und $S \subset X$ beliebig mit $\mu(S) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $A_i \in \mathcal{R}$, so dass $S \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und $\sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i) \le \mu(S) + \varepsilon$. Es folgt $S \cap A \subset \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cap A)$ sowie $S \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \setminus A)$. Aus der Definition von μ folgt

$$\mu(S \cap A) + \mu(S \setminus A) \le \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i \setminus A) = \sum_{i=1}^\infty \lambda(A_i) \le \mu(S) + \varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt, dass A μ-messbar ist, da (3.4) für $\mu(S) = \infty$ immer gilt. Somit ist der Satz bewiesen. □

Nach Satz 3.18 ist die Carathéodory-Fortsetzung μ ein vollständiges Maß auf der σ-Algebra der messbaren Mengen $\mathcal{M}(\mu)$, die die durch den Ring $\mathcal{R}$ generierte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ enthält. Um zu zeigen, dass die Carathéodory-Fortsetzung μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ eindeutig ist, benötigen wir folgendes Lemma:

4.7 Lemma (Maximalität der Caratheodory-Fortsetzung). *Sei μ die Caratheodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X. Sei $\widetilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\widetilde{\mu} = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Dann gilt $\widetilde{\mu}(E) \le \mu(E)$ für alle $E \in \sigma(\mathcal{R})$.*

Beweis: Da Maße σ-subadditiv sind, gilt für alle $E \in \sigma(\mathcal{R})$ die Implikation

$$E \subset \bigcup_{i=1}^\infty P_i \text{ mit } P_i \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{\mu}(E) \le \sum_{i=1}^\infty \widetilde{\mu}(P_i) = \sum_{i=1}^\infty \lambda(P_i)\,.$$

Bilden des Infimums über alle solchen Überdeckungen liefert wegen (3.8) die Behauptung. □

4.8 Satz (Hopf-Fortsetzung). *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, falls λ σ-endlich ist.*

Beweis: Die Existenz des Maßes μ folgt sofort aus Satz 4.6 und Satz 3.18 (man beachte $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mu)$). Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $\widetilde{\mu}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\widetilde{\mu} = \lambda$ auf $\mathcal{R}$. Für $A_i \in \mathcal{R}$ und $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ haben wir mit Satz 1.17 (i)

$$\widetilde{\mu}(A) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mu}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \mu(A)\,.$$

Für $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu(E) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ existieren Mengen $A_i \in \mathcal{R}$, $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ mit $E \subset A$ und $\mu(A) \le \mu(E) + \varepsilon$, also $\mu(A \setminus E) \le \varepsilon$. Somit gilt

$$\mu(E) \le \mu(A) = \widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}(E) + \widetilde{\mu}(A \setminus E) \le \widetilde{\mu}(E) + \mu(A \setminus E) \le \widetilde{\mu}(E) + \varepsilon\,.$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ und Lemma 4.7 folgt $\mu(E) = \widetilde{\mu}(E)$. Sei nun λ σ-endlich. Dann gibt es OBdA paarweise disjunkte Mengen $X_n \in \mathcal{R}$ mit $\mu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Für beliebige $E \in \sigma(\mathcal{R})$ erhalten wir

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(E \cap X_n) = \widetilde{\mu}(E)\,,$$

d.h. μ ist auf $\sigma(\mathcal{R})$ eindeutig. □

Die Carathéodory-Fortsetzung hat die Eigenschaft, dass man zu jeder Menge $M \subset X$ eine μ-messbare Obermenge $D \supset M$ finden kann mit $\mu(M) = \mu(D)$. Äußere Maße mit dieser Eigenschaft werden *regulär* genannt.

4.9 Satz (Regularität der Caratheodory-Fortsetzung). *Sei μ die Carathéodory-Fortsetzung des Prämaßes $\lambda : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X. Dann gibt es zu jeder Menge $D \subset X$ eine Menge $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E) = \mu(D)$. Insbesondere ist μ ein reguläres äußeres Maß.*

Beweis: Im Fall $\mu(D) = \infty$ können wir $E = X$ wählen. Ist $\mu(D) < \infty$, so gibt es nach Definition von μ in (3.8) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung

$$D \subset E^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^n \text{ mit } A_i^n \in \mathcal{R} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_i^n) < \mu(D) + \frac{1}{n}\,.$$

Wähle $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^n$. Dann ist $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supset D$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(D) \le \mu(E) \le \mu(E^n) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i^n) \le \mu(D) + \frac{1}{n} < \infty\,.$$

Mit $n \to \infty$ folgt $\mu(E) = \mu(D)$. □

Im σ-endlichen Fall ist die Carathéodory-Fortsetzung μ sogar eindeutig auf dem System der messbaren Mengen $\mathcal{M}(\mu)$.

4.10 Satz (Eindeutigkeit der Maßfortsetzung). *Sei λ ein σ-endliches Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X und sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ die Caratheodory-Fortsetzung von λ. Dann ist $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$. Insbesondere gibt es genau eine Fortsetzung von $\lambda \colon \mathcal{R} \to [0,\infty]$ zu einem Maß auf $\mathcal{M}(\mu)$.*

Beweis: Da nach Satz 3.18 $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ ein vollständiges Maß ist liefert Satz 1.21 sofort $\overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}} \subset \mathcal{M}(\mu)$. Sei also $D \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $\mu(D) < \infty$. Wir wählen $E \supset D$ aus Satz 4.9. Es folgt aufgrund der Messbarkeit von D

$$\mu(D) = \mu(E) = \mu(E \cap D) + \mu(E \setminus D) = \mu(D) + \mu(E \setminus D) \quad \Rightarrow \quad \mu(E \setminus D) = 0\,.$$

Da λ σ-endlich ist, gibt es Mengen $X_n \in \mathcal{R}$ gibt mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ und $\mu(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Für beliebiges $D \in \mathcal{M}(\mu)$ setze $D_n := \bigcup_{k=1}^{n} D \cap X_k$. Dann ist (D_n) eine monoton wachsende Folge mit $\mu(D_n) < \infty$ und $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Wie bewiesen gibt es $E_n \supset D_n$ mit $E_n \in \sigma(\mathcal{R})$ und $\mu(E_n \setminus D_n) = 0$. Für $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset D$ folgt $E \in \sigma(\mathcal{R})$. Da $E \setminus D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \setminus D_n)$ erhalten wir

$$\mu(E \setminus D) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus D_n) = 0\,.$$

Wir haben also gezeigt, dass es für beliebiges $D \in \mathcal{M}(\mu)$ eine Menge $E \in \sigma(\mathcal{R})$ gibt mit $\mu(E \setminus D) = 0$. Satz 4.9 liefert also eine Menge $N \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $N \supset E \setminus D$ und $\mu(E \setminus D) = \mu(N) = 0$. Also gilt $D = (E \setminus N) \cup (D \cap N) \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$, denn $E \setminus N \in \sigma(\mathcal{R})$ und $D \cap N$ ist eine Teilmenge der $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$-Nullmenge N. Somit ist $\mathcal{M}(\mu) \subset \overline{\sigma(\mathcal{R})}_{\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}}$. Satz 1.21 liefert also, dass die Vervollständigung von $\mu|_{\sigma(\mathcal{R})}$ gleich $\mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ ist. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Satz 4.8 und der gerade gezeigten Charakterisierung von $\mathcal{M}(\mu)$ (vgl. Folgerung 4.11). □

Im Verlauf des Beweises des vorherigen Satzes haben wir auch folgendes bewiesen:

4.11 Folgerung (Charakterisierung von $\mathcal{M}(\mu)$). *Sei $\lambda : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein σ-endliches Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ mit Carathéodory-Fortsetzung μ. Eine Menge $D \subset X$ ist genau dann μ-messbar, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

(i) *Es gibt ein $E \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \supset D$ und $\mu(E \setminus D) = 0$.*

(ii) *Es gibt ein $C \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $C \subset D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$.*

Nun wollen wir die Beziehung zwischen äußeren Maßen und Maßen klären. Aus einem äußeren Maß μ erhalten wir das Maß $\lambda = \mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$ durch Einschränkung auf die σ-Algebra der μ-messbaren Mengen, und λ ist nach Satz 3.13 vollständig.

Umgekehrt können wir ein gegebenes Maß λ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit der Carathéodory-Fortsetzung (Satz 4.6) zu einem äußeren Maß λ^C auf X fortsetzen, und nach Proposition 4.9 ist λ^C regulär. Wir wollen jetzt sehen, dass diese Zuordnungen invers sind, jedenfalls im σ-endlichen Fall.

4.12 Satz (äußere Maße vs. Maße). *Die durch Einschränkung bzw. Fortsetzung gegebenen Abbildungen zwischen den σ-endlichen, regulären äußeren Maßen und den σ-endlichen, vollständigen Maßen auf X sind zueinander invers und insbesondere bijektiv.*

Beweis: (i) Sei λ ein σ-endliches, vollständiges Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$. Aus $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$ folgt $\lambda = \lambda^C|_{\mathcal{A}}$ nach Satz 4.8. Die Vollständigkeit von λ und Satz 4.10 liefern also $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}_\lambda = \mathcal{M}(\lambda^C)$.

(ii) Sei nun μ ein σ-endliches, reguläres äußeres Maß. Wir zeigen $\mu = \lambda^C$ für $\lambda = \mu|_{\mathcal{M}(\mu)}$. Es gilt $\mathcal{M}(\mu) \subset \mathcal{M}(\lambda^C) \subset \mathcal{M}(\mu)$ nach Satz 4.6 und Satz 4.10. Aber μ ist regulär nach Voraussetzung, sowie λ^C regulär nach Satz 4.9, und beide äußere Maße stimmen überein auf $\mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M}(\lambda^C)$, also sind die Maße gleich. □

1.5 Mengensysteme und Mengenfunktionen

Wir wollen in diesem Abschnitt weitere Mengensysteme und Mengenfunktionen betrachten, die zur Konstruktion von Ringen, σ-Algebren und Maßen sehr sinnvoll sind.

Halbringe und Inhalte

In Anwendungen, vor allem im $\mathbb{R}^n$, kann man Ringe bequem durch die folgende Klasse von Erzeugern mit einfachen Eigenschaften generieren.

5.1 Definition. *Ein Mengensystem $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt* Halbring *über X, wenn*

(i) $\emptyset \in \mathcal{Q}$

(ii) $P, Q \in \mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad P \cap Q \in \mathcal{Q}$

(iii) $P, Q \in \mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad P \backslash Q = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ *mit endlich vielen, paarweise disjunkten $P_i \in \mathcal{Q}$.*

Halbringe sind $\cap$-stabil. Die Definition des Halbringes ist motiviert durch das folgende Beispiel.

5.2 Beispiele. (i) Eine Menge $I \subset \mathbb{R}$ heißt *Intervall*, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ gibt, so dass gilt:

$$(a, b) \subset I \subset [a, b]\,. \tag{5.3}$$

Das System aller Intervalle des $\mathbb{R}$ wird mit $\mathcal{I}$ bezeichnet. Ein achsenparalleler n-dimensionaler *Quader* (im Folgenden kurz als Quader bezeichnet) ist ein kartesisches Produkt $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ von Intervallen. Das System aller Quader des $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{Q}^n$ bezeichnet.

(ii) Sei X eine beliebige Menge. Dann ist $\mathcal{Q} := \{\emptyset\} \cup \big\{\{a\} \,\big|\, a \in X\big\}$ ein Halbring.

Wir zeigen nun, dass das System der Quader des $\mathbb{R}^n$ einen Halbring bildet.

5.4 Satz. *Das System $\mathcal{I}$ der Intervalle aus $\mathbb{R}$ ist ein Halbring.*

Beweis: Die leere Menge ist ein Intervall, denn es gilt $\emptyset = (a, a)$ für $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit Grenzen $a \leq b$ bzw. $c \leq d$. Für $I \cap J \neq \emptyset$ ist $\max(a, c) \leq \min(b, d)$, und

$$(\max(a, c), \min(b, d)) \subset I \cap J \subset [\max(a, c), \min(b, d)].$$

Also ist $I \cap J$ ein Intervall. $I \setminus J$ läßt sich als Vereinigung von höchstens zwei disjunkten Intervallen darstellen. Wegen $I \setminus J = I \setminus (I \cap J)$ können wir dazu $J \subset I$ annehmen. Setze

$$I' = \{x \in I \setminus J \,|\, x \leq c\} \quad I'' = \{x \in I \setminus J \,|\, x \geq d\}.$$

Falls $I' \cap I'' \neq \emptyset$, so ist $c = d \in I \setminus J$, also $J = \emptyset$ bzw. $I \setminus J = I$. Andernfalls gilt die disjunkte Zerlegung $I \setminus J = I' \cup I''$, wobei

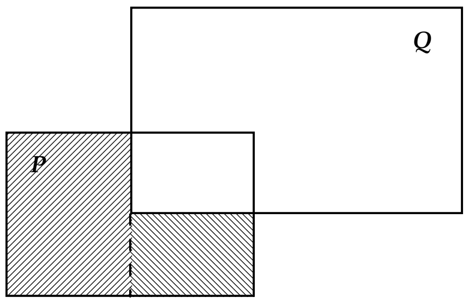
$$(a, c) \subset I' \subset [a, c], \quad (d, b) \subset I'' \subset [d, b]\,. \qquad \square$$

5.5 Satz (Produktmengen). *Für $i = 1, \ldots, n$ sei $\mathcal{Q}_i$ ein Halbring über X_i. Dann ist das System*

$$\mathcal{Q} = \{P_1 \times \ldots \times P_n \,\big|\, P_i \in \mathcal{Q}_i\}$$

der Produktmengen ein Halbring über $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung nur im Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall folgt dann mit Induktion über die Dimension n. Graphisch ist die Behauptung klar.



Es ist $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{Q}$. Für $P = I_1 \times I_2$ und $Q = J_1 \times J_2$ gilt

$$P \cap Q = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \cap J_2)\,,$$

also $P \cap Q \in \mathcal{Q}$. Weiterhin ist

$$P \setminus Q = \big((I_1 \cap J_1) \times (I_2 \setminus J_2)\big) \cup \big((I_1 \setminus J_1) \times I_1\big)\,.$$

Die Mengen auf der rechten Seite sind disjunkt und sowohl $I_1 \setminus J_1$ als auch $I_2 \setminus J_2$ sind als disjunkte Vereinigungen darstellbar, da $\mathcal{Q}_1$ und $\mathcal{Q}_2$ Halbringe sind. Somit ist $P \setminus Q$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{Q}$. $\square$

Aus den Sätzen 5.4 und 5.5 folgt sofort

5.6 Folgerung. *Das System $\mathcal{Q}^n$ der Quader aus $\mathbb{R}^n$ ist ein Halbring.*

Ein Vorteil des Halbringes ist, dass der daraus erzeugte Ring einfach zu charakterisieren ist.

5.7 Satz (Konstruktion des erzeugten Rings). *Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring über X und $\mathcal{F}$ das System aller endlichen Vereinigungen $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$ von Mengen $P_i \in \mathcal{Q}$. Dann ist $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring.*

Beweis: Jeder Ring $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ enthält nach Definition $\mathcal{F}$. Es ist also nur zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Ring ist. Nun gilt $\emptyset \in \mathcal{F}$ und mit $E, F \in \mathcal{F}$ auch $E \cup F \in \mathcal{F}$. Ist $E = \bigcup_{i=1}^k P_i$ und $F = \bigcup_{j=1}^m Q_j$ mit $P_i, Q_j \in \mathcal{Q}$, so folgt

$$E \setminus F = (\bigcup_{i=1}^k P_i) \setminus (\bigcup_{j=1}^m Q_j) = \bigcup_{i=1}^k (P_i \setminus \bigcup_{j=1}^m Q_j) = \bigcup_{i=1}^k \Big(\bigcap_{j=1}^l P_i \setminus Q_j \Big).$$

Per Definition ist $\mathcal{F}$ $\cup$-stabil. Aufgrund der Definition 5.1 des Halbrings sind auch $P_i \setminus Q_j \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, m$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ $\cap$-stabil ist. Mit E und F wie oben gilt aber

$$E \cap F = \Big(\bigcup_{i=1}^k P_i \Big) \cap \Big(\bigcup_{j=1}^l Q_j \Big) = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^m (P_i \cap Q_j)$$

Da ein Halbring $\cap$-stabil ist und $\mathcal{F}$ $\cup$-stabil ist, liegt die rechte Seite in $\mathcal{F}$. Damit ist der Satz bewiesen. □

5.8 Beispiele. (i) Den vom System $\mathcal{Q}^n$ aller Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ (Beispiel 5.2 (i)) erzeugten Ring bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^n$. Seine Elemente heißen *Figuren*, die also endliche Vereinigungen von Quadern sind.

(ii) Der in Beispiel 5.2 (ii) definierte Halbring $\mathcal{Q}$ erzeugt den Ring der endlichen Teilmengen (Beispiel 4.3 (ii)).

5.9 Folgerung. *Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring über X, und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann ist $\sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

Beweis: Aus $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ folgt $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \sigma(\mathcal{F})$. Da $\sigma(\mathcal{Q})$ $\cup$-stabil ist folgt aus Satz 5.7 $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{Q})$ und somit die umgekehrte Inklusion. □

5.10 Lemma (Zerlegungslemma). *Sei $\mathcal{Q}$ ein Halbring über X, und $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ gibt es paarweise disjunkte Mengen $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{Q}$ mit*

$$F = \bigcup_{j=1}^k P_j \,.$$

Beweis: Sei $F \in \mathcal{F}$. Nach Satz 5.7 gilt $F = \bigcup_{l=1}^m Q_l$ mit $Q_l \in \mathcal{Q}$, also folgt die disjunkte Zerlegung

$$F = \bigcup_{l=1}^m (Q_l \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} Q_i) \,.$$

Deshalb reicht es zu zeigen, dass Mengen der Form $Q \setminus \bigcup_{i=1}^n Q_i$ mit $Q_1, \ldots, Q_n, Q \in \mathcal{Q}$ eine disjunkte Zerlegung in $\mathcal{Q}$ besitzen. Dies beweisen wir mit Induktion über n. Für $n = 1$ gilt dies nach Definition 5.1. Ist die disjunkte Zerlegung $Q \setminus \bigcup_{i=1}^n Q_i = \bigcup_{j=1}^k P_j$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schon gefunden, so folgt

$$Q \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} Q_i = \Big(\bigcup_{j=1}^{k} P_j \Big) \setminus Q_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{k} (P_j \setminus Q_{n+1}) \,.$$

Die Mengen $P_j \setminus Q_{n+1}$, $j = 1, \ldots, k$, sind paarweise disjunkt und ihrerseits Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{Q}$ nach Definition 5.1. □

5.11 Definition. *Sei $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Halbring. Eine Funktion $\lambda : \mathcal{Q} \to [0, \infty]$ heißt* Inhalt *auf dem Halbring $\mathcal{Q}$, wenn*

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$,

(ii) *für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{Q}$, $i = 1, \ldots, n$, mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{Q}$ gilt:*

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) \qquad (\textit{endliche Additivität auf } \mathcal{Q}) \,.$$

Ein Inhalt λ heißt Prämaß *auf den Halbring $\mathcal{Q}$, wenn λ σ-additiv auf $\mathcal{Q}$ ist, d.h. für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathcal{Q}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{Q}$ gilt:*

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i) \qquad (\sigma\textit{-Additivität auf } \mathcal{Q}) \,.$$

Die Begriffe *σ-subadditiv, subadditiv, σ-endlich, endlich*, *monoton*, sowie *Nullmenge* und *fast überall* werden für Prämaße und Inhalte analog zu den entsprechenden Begriffen für Maße definiert. Falls $\mathcal{Q}$ in Definition 5.11 ein Ring ist stimmt die Definition des Prämaßes in Definition 5.11 mit der Definition des Prämaßes in Definition 4.4 überein.

Da Halbringe einfache Erzeuger von Ringen sind, kann man leicht auf Halbringen definierte Inhalte bzw. Prämaße eindeutig auf Ringe fortsetzen. Der folgende Satz und Satz 5.18 zeigen, dass man also nur auf dem Halbring überprüfen muss ob eine gegebene Mengenfunktion ein Inhalt bzw. Prämaß ist.

5.12 Satz (Fortsetzung auf den erzeugten Ring). *Sei λ ein Inhalt auf dem Halbring $\mathcal{Q}$ und sei $\mathcal{F}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Dann gibt es genau einen Inhalt $\overline{\lambda} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ mit $\overline{\lambda}(Q) = \lambda(Q)$ für alle $Q \in \mathcal{Q}$.*

Beweis: Ist $F = \bigcup_{i=1}^k P_i$ mit $P_i \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt wie in Lemma 5.10, so muss für jeden Inhalt $\overline{\lambda}$, der eine Fortsetzung des Inhalts λ ist, notwendig gelten

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i). \tag{5.13}$$

Deshalb ist die Fortsetzung $\overline{\lambda}$ eindeutig durch λ bestimmt. Wir wollen $\overline{\lambda}$ durch (5.13) definieren. Dazu ist zu zeigen, dass die rechte Seite nicht von der Wahl der Zerlegung abhängt. Sei $F = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j$ eine andere disjunkte Darstellung mit $Q_j \in \mathcal{Q}$. Aus den disjunkten Darstellungen $Q_j = \bigcup_{i=1}^{k} Q_j \cap P_i$, $j = 1, \ldots, l$, und $P_i = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j \cap P_i$, $i = 1, \ldots, k$, folgt dann

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda(Q_j) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i \cap Q_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda(P_i \cap Q_j) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i)\,.$$

Somit ist $\overline{\lambda}$ wohldefiniert. Für eine disjunkte Vereinigung $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ mit $F, F_i \in \mathcal{F}$ schreiben wir $F_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} P_{i,j}$ mit $P_{i,1}, \ldots, P_{i,m_i} \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt und erhalten

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \lambda(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}(F_i).$$

Also ist $\overline{\lambda}$ der gesuchte Inhalt. □

5.14 Folgerung (Monotonie und Subadditivität). *Ein Inhalt λ auf dem Halbring $\mathcal{Q}$ über X ist monoton und subadditiv.*

Beweis: Nach Satz 5.12 können wir annehmen, dass $\mathcal{Q}$ ein Ring ist. Da λ nichtnegativ ist, erhalten wir

$$P, Q \in \mathcal{Q},\ Q \supset P \quad \Rightarrow \quad \lambda(Q) = \lambda(P) + \lambda(Q \setminus P) \geq \lambda(P)\,,$$

d.h. λ ist monoton. Für $P_i \in \mathcal{Q}$, $i = 1, \ldots, k$ erhalten wir

$$\lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda\Big(P_i \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{i-1} P_j\Big)\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda(P_i)\,,$$

d.h. λ ist subadditiv. □

5.15 Beispiel. Auf dem Halbring $\mathcal{Q}^n$ aller Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ (Beispiel 5.2, Folgerung 5.6) können wir das *elementargeometrische Volumen* vol^n wie folgt definieren:
Für $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$, wobei $I_j \subset \mathbb{R}$ Intervalle sind und $a_j \leq b_j$ die Intevallgrenzen von I_j, setzen wir

$$\mathrm{vol}^n(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \geq 0\,. \tag{5.16}$$

Die so definierte Funktion vol^n stimmt mit denen im Alltag verwendeten Volumen von Quadern im $\mathbb{R}^3$, Flächeninhalt von Rechtecken im $\mathbb{R}^2$ und der Länge von Strecken in $\mathbb{R}$ überein. Der nächste Satz zeigt, dass vol^n ein Inhalt im Sinne der Definition 5.11 ist. Demzufolge liefert Satz 5.12, dass man vol^n eindeutig zu einem Inhalt auf den Ring der Figuren $\mathcal{F}^n$ fortsetzen kann. Den so fortgesetzten Inhalt bezeichnen wir auch mit $\mathrm{vol}^n : \mathcal{F}^n \to [0, \infty]$.

5.17 Satz (Elementarinhalt von Quadern). *Das in (5.16) definierte elementargeometrische Volumen* $\mathrm{vol}^n(\cdot)$ *ist ein Inhalt auf dem Halbring* $\mathcal{Q}^n$ *der Quader im* $\mathbb{R}^n$*.*

Beweis: Offensichtlich ist $\mathrm{vol}^n(\emptyset) = 0$. Um die endliche Additivität von vol^n zu zeigen, verwenden wir Induktion über die Dimension n. Für $n = 1$ sind die Indikatorfunktionen von Intervallen $I_1, \ldots, I_k$ Riemann-integrierbar und wir erhalten für paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_k$

$$\mathrm{vol}^1\Big(\bigcup_{i=1}^k I_i\Big) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^k \chi_{I_i}\,dx = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_i}\,dx = \sum_{i=1}^k \mathrm{vol}^1(I_i)\,.$$

Sei nun die Aussage für den Inhalt vol^{n-1} im $\mathbb{R}^{n-1}$ schon bewiesen. Betrachte für den Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathcal{Q}^n$ den y-Schnitt

$$Q^y = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, (x,y) \in Q\} = \begin{cases} I_1 \times \ldots \times I_{n-1} & \text{falls } y \in I_n\,, \\ \emptyset & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann gilt $\lambda^{n-1}(Q^y) = \lambda^{n-1}(I_1 \times \ldots \times I_{n-1})\,\chi_{I_n}(y)$ und für jede paarweise disjunkte Zerlegung $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$ mit $Q_i \in \mathcal{Q}^n$ haben wir $Q^y = \big(\bigcup_{i=1}^k Q_i\big)^y = \bigcup_{i=1}^k Q_i^y$. Somit folgt induktiv

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}^n\Big(\bigcup_{i=1}^k Q_i\Big) &= \mathrm{vol}^n(Q) = \mathrm{vol}^{n-1}(I_1 \times \ldots \times I_{n-1})\,\mathrm{vol}^1(I_n) \\
&= \mathrm{vol}^{n-1}(I_1 \times \ldots \times I_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_n}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}^{n-1}(Q^y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}^{n-1}\Big(\bigcup_{i=1}^k Q_i^y\Big)\,dy = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}} \mathrm{vol}^{n-1}\big(Q_i^y\big)\,dy \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{vol}^n(Q_i)\,.
\end{aligned}$$

Dies beweist den Satz. □

5.18 Satz. *Ist* $\lambda : \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ *ein Prämaß auf dem Halbring* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ *der von* $\mathcal{Q}$ *erzeugte Ring und* $\overline{\lambda} : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ *der eindeutig bestimmte Inhalt auf dem Ring* $\mathcal{R}$ *mit* $\overline{\lambda}|_{\mathcal{P}} = \lambda$ *(Satz 5.12), so ist* $\overline{\lambda}$ *ein Prämaß auf dem Ring* $\mathcal{R}$*.*

Beweis: Sei $F = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$ mit $F, F_i \in \mathcal{R}$ und F_i paarweise disjunkt. Nach Lemma 5.10 gibt es dann paarweise disjunkte Zerlegungen $F = \bigcup_{j=1}^k P_j$ und $F_i = \bigcup_{k=1}^{k_i} P_{i,k}$ mit P_j, $P_{i,k} \in \mathcal{Q}$. Es folgt die disjunkte Zerlegung

$$P_j = \bigcup_{i=1}^\infty (P_j \cap F_i) = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{k_i} (P_j \cap P_{i,k})\,.$$

Da λ ein Prämaß ist , folgt hieraus $\lambda(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_i}\lambda(P_j \cap P_{i,k}) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\lambda}(P_j \cap F_i)$, und somit

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{j=1}^{k}\lambda(P_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\overline{\lambda}(P_j \cap F_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{\lambda}(F_i)\,,$$

d.h. $\overline{\lambda}$ ist ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$. □

Sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Der vorherige Satz besagt, dass dann die eindeutig bestimmte Fortsetzung $\overline{\lambda} : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ ist. Aufgrund von Satz 5.12 ist sie für $F \in \mathcal{R}$ gegeben durch

$$\overline{\lambda}(F) = \sum_{i=1}^{n}\lambda(Q_i)\,, \tag{5.19}$$

wobei $F = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ mit paarweise disjunkten $Q_i \in \mathcal{Q}$ (Satz 5.10). Wir betrachten nun die in Satz 3.7 konstruierten äußeren Maße für die Prämaße λ auf dem Halbring $\mathcal{Q}$ und $\overline{\lambda}$ auf dem Ring $\mathcal{R}$. Auf Grund von $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$, $\lambda = \overline{\lambda}$ auf $\mathcal{Q}$, (5.19) und Satz 5.10 gilt

$$\begin{aligned}
&\inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(Q_k)\,\Big|\, Q_k \in \mathcal{Q}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_k\Big\}\\
&\geq \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\overline{\lambda}(F_i)\,\Big|\, F_i \in \mathcal{R}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big\}\\
&= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{j_i}\lambda(Q_{i,j})\,\Big|\, F_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j},\ Q_{i,j} \in \mathcal{Q}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{j_i} Q_{i,j}\Big\}\\
&\geq \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(Q_k)\,\Big|\, Q_k \in \mathcal{Q}, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_k\Big\}\,.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Somit stimmen beide äußeren Maße überein und wir erhalten eine Verschärfung von Satz 4.6

5.21 Satz (Caratheodory-Fortsetzung). *Sei $\lambda : \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$. Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ das in Satz 3.7 aus $\mathcal{Q}$ konstruierte äußere Maß, d.h. für alle $E \subset X$ ist*

$$\mu(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda(A_i)\,\Big|\, A_i \in \mathcal{Q},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}\,.$$

Dann ist μ eine Fortsetzung *von λ. Man bezeichnet μ* als das durch λ induzierte, äußere Maß *oder als* Carathéodory-Fortsetzung von λ.

5.22 Bemerkung. Nach Satz 4.9 ist die Carathéodory-Fortsetzung μ ein reguläres äußeres Maß. Weiterhin ist μ nach Satz 3.18 ein vollständiges Maß auf der σ-Algebra der μ-messbaren Mengen $\mathcal{M}(\mu)$. Der Maßraum $(X, \mathcal{M}(\mu), \mu|_{\mathcal{M}(\mu)})$ ist die Vervollständigung des Maßes $(X, \sigma(\mathcal{Q}), \mu|_{\sigma(\mathcal{Q})})$ und ist auf $\mathcal{M}(\mu)$ eindeutig bestimmt, d.h. sie stimmt auf $\mathcal{M}(\mu)$ mit jeder weiteren Fortsetzung überein (Satz 4.10). Insbesondere ist eine Menge $D \subset X$ genau dann μ-messbar, wenn es eine Menge $C \in \sigma(\mathcal{Q})$ gibt mit $C \subset D$ und $\mu(D \setminus C) = 0$ (Folgerung 4.11, Folgerung 5.9).

Der folgende Satz ist oftmals nützlich zum Nachweis ob ein Inhalt ein Prämaß ist. Er besagt auch, dass die Stetigkeitseigenshaften von Maßen auch für Prämaße gelten (vgl. Satz 1.17).

5.23 Satz. *Für einen Inhalt λ auf einem Ring $\mathcal{R}$ und Mengen $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbb{N}$, betrachten wir folgende Aussagen:*

(i) *λ ist ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.*

(ii) *aus $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \ldots$ folgt $\lambda\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \lambda(A_i)\,,$*

(iii) *aus $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots$, mit $\lambda(A_1) < \infty$ folgt $\lambda\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{i\to\infty} \lambda(A_i)\,,$*

(iv) *aus $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots$, mit $\lambda(A_1) < \infty$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ folgt $\lim_{i\to\infty} \lambda(A_i) = 0\,,\ .$*

Dann bestehen die folgenden Implikationen: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Ist λ endlich, d.h. $\lambda(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$, dann sind (i)–(iv) äquivalent.

Beweis: Der Beweis der Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist identisch mit dem Beweis der Eigenschaften (i) und (ii) im Satz 1.17. Die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist trivial. Um die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu beweisen betrachten wir paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Dann erfüllt $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ die Bedingungen in (ii) und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Da λ endlich additiv ist folgt somit

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)\,,$$

d.h. λ ist σ-additiv auf $\mathcal{R}$.

Um die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) zu beweisen sei nun λ ein endlicher Inhalt. Sei $(A_i) \subset \mathcal{R}$ eine monoton aufsteigende Folge mit $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Für die fallende Folge $B_n := A \setminus A_n$ gilt offenbar $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Also nach (iv) $\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) = 0$. Da λ ein endlicher Inhalt ist, gilt $\lambda(B_n) = \lambda(A \setminus A_n) = \lambda(A) - \lambda(A_n)$, also $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(A) = \lambda\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big)$. □

Die Eigenschaft (iv) nennt man $\emptyset$-*Stetigkeit* des Prämaßes λ.

Dynkin-Systeme, monotone Klassen und Produkträume

Dynkin-Systeme sind Mengensysteme mit einfachen Eigenschaften, die unter geeigneten Voraussetzungen eine σ-Algebra generieren (Satz 5.26). Es ist oft einfacher zu zeigen, dass ein System ein Dynkin-System ist, als zu überprüfen ob es eine σ-Algebra ist.

5.24 Definition. *Ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt* Dynkin-System*, falls*

(i) $X \in \mathcal{D}$

(ii) $A \subset B \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad B \setminus A \in \mathcal{D}$

(iii) *falls $A_i \in \mathcal{D}$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt* $\quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Satz 1.3 über Durchschnitte von σ-Algebren gilt analog für Dynkin-Systeme. Also kann man wie für σ-Algebren *erzeugte Dynkin-Systeme* definieren. Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System.

Beispiele. (i) σ-Algebren sind Dynkin-Systeme.

(ii) Sei X eine Menge mit gerader Anzahl von Elementen, d.h. $\operatorname{card}(X) = 2N$, $N \geq 2$. Setze $\mathcal{D} := \{D \subset X \mid \operatorname{card}(D) = 2n, n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra, denn $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\} \in \mathcal{D}$, aber der Durchschnitt $\{x_2\} \notin \mathcal{D}$.

5.25 Satz. *Ein Dynkin-System ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist.*

Beweis: Das die $\cap$-Stabilität hinreichend ist folgt aus dem vorherigen Beispiel. Um die Notwendigkeit zu beweisen, sei $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System. Für $A, B \in \mathcal{D}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{D}$, und somit $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, also $A \cup B \in \mathcal{D}$. Für eine beliebige Folge $(A_i) \subset \mathcal{D}$ definieren wir $\hat{A}_0 := \emptyset$, $\hat{A}_i := \bigcup_{j=1}^{i} A_j$ für $i \geq 1$. Dann sind $B_i := \hat{A}_i \setminus \hat{A}_{i-1} \in \mathcal{D}$, $i \geq 1$, paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Also ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{D}$ ist somit eine σ-Algebra. □

5.26 Satz. *Für jedes $\cap$-stabile Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Beweis: Da $\sigma(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, das $\mathcal{E}$ umfaßt, gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. Es bleibt zu zeigen: $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist. Nach dem vorigen Satz gilt dies, falls $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist. Dazu betrachten wir zuerst $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und setzen $\mathcal{D}_D := \{Q \subset X \mid Q \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}$.

(i) $\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkin-System ist. Offenbar ist $X \in \mathcal{D}_D$. Für $E, F \in \mathcal{D}_D$ mit $E \subset F$ gilt: $(F \setminus E) \cap D = (F \cap D) \setminus (E \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, mithin $F \setminus E \in \mathcal{D}_D$. Für paarweise disjunkte $D_i \in \mathcal{D}_D$, $i \in \mathbb{N}$, gilt: $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) \cap D = \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, also $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{D}_D$.

(ii) Für $E \in \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$, denn für beliebige $F \in \mathcal{E}$ folgt $E \cap F \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$, da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist. Also haben wir $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$ und somit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$.

(iii) Für $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$, denn für alle $E \in \mathcal{E}$ besagt (ii), dass $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$. Aus der Definition von $\mathcal{D}_E$ erhalten wir nun $D \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, woraus $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$ und somit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$ folgt.

Behauptung (iii) besagt aber gerade, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist. Somit ist der Satz bewiesen. □

Die im vorherigen Beweis benutzte Technik nennt man *das Prinzip der guten Mengen*. Ein weiteres Hilfsmittel, um zu überprüfen ob ein Mengensystem eine σ-Algebra ist, sind monotone Klassen.

5.27 Definition. *Ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt* monotone Klasse*, falls*

(i) *aus $A_1 \subset \ldots \subset A_i \subset A_{i+1} \ldots,\ A_i \in \mathcal{M}$ folgt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$,*

(ii) *aus $A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \ldots,\ A_i \in \mathcal{M}$ folgt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.*

Offenbar ist jede monotone Klasse, die eine Algebra ist eine σ-Algebra. Satz 1.3 über Durchschnitte von σ-Algebren gilt analog für monotone Klassen. Also kann man wie für σ-Algebren *erzeugte monotone Klassen* definieren. Für ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte monotone Klasse.

5.28 Satz. *Für jede Algebra $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \sigma(\mathcal{R})$.*

Beweis: Um die Behauptung zu zeigen reicht es zu beweisen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ eine Algebra ist. Für beliebige $E \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ setzen wir $\mathcal{M}_E := \{Q \subset X \mid Q \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), E \setminus Q \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), E \cup Q \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}$, d.h. $\mathcal{M}_E$ ist das System der „guten Mengen“, die die Ringaxiome erfüllen.

(i) $\mathcal{M}_E$ ist eine monotone Klasse. Dies folgt sofort aus den de Morganschen Regeln.

(ii) Für $E \in \mathcal{R}$ gilt offenbar $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_E$ und somit $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_E$.

(iii) Wir wollen nun für $Q \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ zeigen, dass $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_Q$. Sei $E \in \mathcal{R}$. In (ii) haben wir gezeigt, dass $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_E$. Also folgt $Q \in \mathcal{M}_E$. Da die Bedingungen in der Definition von $\mathcal{M}_E$ symmetrisch in E und Q sind, folgt $E \in \mathcal{M}_Q$, d.h. $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_Q$. Somit $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}_Q$.

(iv) $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist eine Algebra, denn für $E, Q \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ folgt aus (iii) $E \in \mathcal{M}_Q$, d.h. $E \setminus Q \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, $Q \setminus E \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, $E \cup Q \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ nach Definition von $\mathcal{M}_Q$. Somit ist $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ein Ring. Aber $\mathcal{R}$ ist eine Algebra und somit haben wir auch $X \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, d.h. $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist eine Algebra.

Also ist $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ eine monotone Klasse und eine Algebra, und somit eine σ-Algebra. $\square$

Wir wollen nun untersuchen wie man kartesische Produkte von messbaren Räumen kanonisch mit einer σ-Algebra versehen kann. Gegeben sei eine Familie nichtleerer Mengen $(X_i)_{i\in I}$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist. Das *das kartesische Produkt* $\prod_{i\in I} X_i$ von $(X_i)_{i\in I}$ ist definiert durch

$$\prod_{i\in I} X_i := \Big\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \,\Big|\, x(i) \in X_i \text{ für alle } i \in I \Big\}.$$

Die Elemente sind Abbildungen $x = (x_i)_{i\in I}$. Für nichtleere Teilmengen J von I definieren wir *Projektionen* durch

$$\pi_J := \pi_J^I : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in J} X_i \colon (x_i)_{i\in I} \to (x_i)_{i\in J}\,.$$

Speziell für $J = \{j\}$ haben wir also

$$\pi_j := \pi^I_{\{j\}} : \prod_{i \in I} X_i \to X_j : (x_i)_{i \in I} \to x_j$$

Motiviert durch Beispiel 2.5 definieren wir eine Produkt-σ-Algebra auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$.

5.29 Definition. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ messbare Räume. Die von den Projektionen $(\pi_i)_{i \in I}$ induzierte σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt* Produkt-σ-Algebra *auf* $\prod_{i \in I} X_i$. *Wir schreiben $\mathcal{A} =: \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Der messbare Raum $\big(\prod_{i \in I} X_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i\big)$ heißt das* Produkt der messbaren Räume $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$.

5.30 Lemma. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ messbare Räume, und sei J eine nichtleere Teilmenge von I. Die Projektion $\pi_J = \pi^I_J : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in J} X_i$ ist $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$-$\bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j$-messbar.*

Beweis: Nach Definition ist $\bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j = \sigma\big(\bigcup_{j \in J} (\pi^J_j)^{-1}(\mathcal{A}_j)\big)$. Ferner gilt für $\pi_J = \pi^I_J$

$$\begin{aligned}
\pi_J^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} (\pi^J_j)^{-1}(\mathcal{A}_j)\right) &= \bigcup_{j \in J} \pi_J^{-1} (\pi^J_j)^{-1}(\mathcal{A}_j) \\
&= \bigcup_{j \in J} \left(\pi^J_j \circ \pi_J\right)^{-1}(\mathcal{A}_j) \\
&= \bigcup_{j \in J} \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j) \subset \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i \,.
\end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.4 folgt die Behauptung. □

Sei $M \subset \prod_{i \in I} X_i$ und sei $a_j \in X_j$ für ein festes aber beliebiges $j \in I$. Der *Schnitt von M durch a_j* ist definiert als

$$M^{a_j} := \left\{ (x_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \in \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i \,\Big|\, \text{ mit } x_j := a_j \text{ gilt } (x_i)_{i \in I} \in M \right\}.$$

Man überlegt sich sofort, dass $M^{a_j} = \pi^I_{I \setminus \{j\}}(M)$. Somit liefert Lemma 5.30:

5.31 Folgerung. *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ messbare Räume, sei $M \in \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$, und sei $a_j \in X_j$ für ein $j \in I$. Dann ist der Schnitt M^{a_j} ein Element von $\bigotimes_{i \in I \setminus \{j\}} \mathcal{A}_i$.*

5.32 Beispiel. Der folgende Spezialfall wird später eine große Rolle spielen. Für $I = \{1, 2\}$, $M \subset X_1 \times X_2$, und $a_i \in X_i$, $i = 1, 2$, haben wir

$$\begin{aligned}
M^{a_1} &= \left\{ x_2 \in X_2 \,\big|\, (a_1, x_2) \in M \right\}, \\
M^{a_2} &= \left\{ x_1 \in X_1 \,\big|\, (x_1, a_2) \in M \right\}.
\end{aligned}$$

Falls $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, messbare Räume sind, besagt Folgerung 5.31 dann, dass für alle Mengen $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und alle Punkte $a_i \in X_i$, $i = 1, 2$, alle Schnitte M^{a_1} bzw. M^{a_2} in $\mathcal{A}_2$ bzw. $\mathcal{A}_1$ liegen.

5.33 Satz (Erzeugersystem für Produkträume). *Seien* $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ *messbare Räume, wobei* $\mathcal{A}_i$ *durch* $\mathcal{E}_i$ *erzeugt wird, d.h.* $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$, $i \in I$. *Dann ist* $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i = \sigma\big(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\big)$.

Beweis: Aus der Definition der Produkt-σ-Algebra, Lemma 2.3 und Beispiel 1.7 (v) angewandt auf $\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$ folgt

$$\begin{aligned}\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) &= \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E}_i)\big)\right)\\ &= \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma\big(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\big)\right)\\ &= \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right). \qquad \square\end{aligned}$$

Im Falle von endlich vielen messbaren Räumen haben wir folgende einfache Charakterisierung der Produkt-σ-Algebra.

5.34 Folgerung. *Seien* $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, \dots, n$, *messbare Räume, wobei* $\mathcal{A}_i$ *durch* $\mathcal{E}_i$ *erzeugt wird und* $\mathcal{E}_i$ *eine Folge* $(E_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, *mit* $\bigcup_{k=1}^\infty E_i^k = X_i$, *enthält. Dann erzeugt*

$$\mathcal{Q}_0 := \left\{ \prod_{i=1}^n A_i \,\middle|\, A_i \in \mathcal{E}_i \right\}$$

die Produkt-σ*-Algebra* $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$.

Beweis: Für $A_i \in \mathcal{E}_i$ folgt aus der Darstellung $\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod_{j\neq i} X_j$, dass

$$\bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i) = \left\{ A_i \times \prod_{j\neq i} X_j \,\middle|\, A_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n \right\} =: \mathcal{Q}\,,$$

sowie $\prod_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}(A_i) \in \sigma(\mathcal{Q})$ aufgrund der $\cap$-Stabilität von $\sigma(\mathcal{Q})$, d.h. $\mathcal{Q}_0 \subset \sigma(\mathcal{Q})$. Satz 5.33 impliziert also $\sigma(\mathcal{Q}_0) \subset \sigma(\mathcal{Q}) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. Für $A_i \in \mathcal{E}_i$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $F^k := A_i \times \prod_{j\neq i} E_j^k \in \mathcal{Q}_0$. Also ist $\pi_i^{-1}(A_i) = \bigcup_{k=1}^\infty F^k \in \sigma(\mathcal{Q}_0)$ und somit $\mathcal{Q} \subset \sigma(\mathcal{Q}_0)$, woraus $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{Q}) \subset \sigma(\mathcal{Q}_0)$ folgt. $\square$

5.35 Beispiel. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist das Produkt der Borel-σ-Algebren $\mathcal{B}^1$ auf $\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{B}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}^1$.

Sei $\mathcal{E}_i = \mathcal{I}$, $i = 1, \dots, n$, wobei $\mathcal{I}$ das System der Intervalle I aus $\mathbb{R}$ ist. Dann stimmt offenbar das System $\mathcal{Q}_0$ aus Folgerung 5.34 mit dem System der Quader $\mathcal{Q}^n$ des $\mathbb{R}^n$ überein. In Lemma 6.6 werden wir zeigen, dass $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n)$ und $\mathcal{B}^1 = \sigma(\mathcal{I})$. Da $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^\infty (-k, k)$, erfüllen $\mathcal{E}_i$ die Voraussetzungen von Folgerung 5.34. Also haben wir $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}^1$.

Um die Produkt-σ-Algebra im allgemeinen Fall besser charakterisieren zu können bezeichnen wir das System aller endlichen und nichtleeren Teilmengen einer Indexmenge I mit $\mathcal{P}_0(I)$, d.h.

$$\mathcal{P}_0(I) := \{J \subset I \mid J \text{ nichtleer und endlich}\}\,.$$

Für eine Familie messbarer Räume $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ definieren wir die Menge der *messbaren Quader* durch

$$\mathcal{Q} := \bigcup_{J \in \mathcal{P}_0(I)} \left\{ \prod_{j \in J} A_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \,\Big|\, A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für alle } j \in J \right\}, \tag{5.36}$$

und die Menge der *Zylindermengen* durch

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{J \in \mathcal{P}_0(I)} \left\{ A_J \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i \,\Big|\, A_J \in \bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j \right\} = \bigcup_{J \in \mathcal{P}_0(I)} \pi_J^{-1}(\mathcal{A}_J)\,, \tag{5.37}$$

wobei $\mathcal{A}_J := \bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j$.

5.38 Satz. *Sei $(X_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie messbarer Räume. Dann erzeugen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Z}$ die Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$, d.h. $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{Z})$.*

Beweis: Wir bezeichnen $\mathcal{A} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ und zeigen $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{Q})$, denn daraus folgt $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \sigma(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{Q})$, also die Behauptung.

$\mathcal{Q} \subset \mathcal{Z}$: Sei $A \in \mathcal{Q}$, etwa gegeben durch $A = A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n} \times \prod_{i \notin J} X_i = \pi_J^{-1}(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n})$, wobei $J = \{i_1, \dots, i_n\}$. Dann ist $A_{i_1} \times \dots \times A_{i_n} = (\pi_{i_1}^J)^{-1}(A_{i_1}) \cap \dots \cap (\pi_{i_n}^J)^{-1}(A_{i_n}) \in \mathcal{A}_J$.

$\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$: π_J ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_J$-meßbar, also ist $\pi_J^{-1}(\mathcal{A}_J) \subset \mathcal{A}$ für alle $J \in \mathcal{P}_0(I)$.

$\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{Q})$: Für alle $i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i$ ist $\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod_{j \neq i} X_j \in \mathcal{Q}$, d.h. $\pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{Q}$, $i \in I$, und somit $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{Q})$ nach Definition der Produkt-σ-Algebra. $\square$

1.6 Das n-dimensionale Lebesguemaß

Wir spezialisieren nun die allgemeinen Ausführungen der vorigen beiden Abschnitte auf das elementargeometrische Volumen im n-dimensionalen Euklidischen Raum. Dies definiert das Lebesguemaß. Dann wird die Beziehung der Lebesgue-messbaren Mengen zur kanonischen Topologie des $\mathbb{R}^n$, also zum System der offenen Mengen, untersucht. Weiter wird die Invarianz des Lebesguemaßes unter Translationen und orthogonalen Transformationen, bewiesen, sowie allgemeiner eine Transformationsformel unter linearen Abbildungen. Zum Schluss geben wir ein Beispiel einer nicht Lebesgue-messbaren Menge in $\mathbb{R}$.

6.1 Lemma. *Der elementargeometrische Inhalt $\mathrm{vol}^n : \mathcal{Q}^n \to [0, \infty)$ ist ein Prämaß auf dem Halbring der Quader $\mathcal{Q}^n$ im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Sei $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit $P, P_i \in \mathcal{Q}^n$ und $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Nun ist vol^n nach Satz 5.12 ein Inhalt auf dem Ring der Figuren, also gilt aufgrund der Monotonie (Folgerung 5.14)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(P_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}^n(P_i) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{vol}^n\big(\bigcup_{i=1}^{k} P_i\big) \leq \mathrm{vol}^n(P)\,.$$

Für die umgekehrte Ungleichung wähle zu $\varepsilon > 0$ offene Quader $Q_i \supset P_i$ und einen kompakten Quader $Q \subset P$, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(Q_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(P_i) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathrm{vol}^n(P) < \mathrm{vol}^n(Q) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nach dem Satz von Heine-Borel wird Q durch endlich viele Quader $Q_1, \ldots, Q_k$ überdeckt, und mit Folgerung 5.14 schließen wir

$$\mathrm{vol}^n(P) < \mathrm{vol}^n(Q) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}^n(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(P_i) + \varepsilon\,.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Somit können wir die Carathéodory-Fortsetzung des Prämaßes vol^n auf dem Halbring der Quader $\mathcal{Q}^n$ betrachten (Satz 5.21) und definieren:

6.2 Definition. *Das* n-dimensionale äußere Lebesguemaß *einer Menge* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ist definiert durch*

$$\lambda^n(E) := \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(Q_k) \,\Big|\, Q_k \in \mathcal{Q}^n, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_k \Big\}\,. \tag{6.3}$$

Die Einschränkung von λ^n *auf die* σ*-Algebra der* Lebesgue-messbaren Mengen $\mathcal{M}(\lambda^n)$ *ist das* n-dimensionale Lebesguemaß*. Wir bezeichnen dieses Maß auch mit* λ^n*.*

6.4 Bemerkung. Auf Grund der Diskussion nach Satz 5.21 ist das äußere Lebesguemaß λ^n regulär und das Lebesguemaß λ^n ist ein vollständiges Maß auf der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen $\mathcal{M}(\lambda^n)$.

Wir wollen nun die Lebesgue-messbaren Mengen $\mathcal{M}(\lambda^n)$ und das Lebesguemaß genauer untersuchen. Dazu betrachten wir zuerst die Borelmengen $\mathcal{B}^n$, d.h. die von den *offenen Mengen* $\mathcal{O}^n$ des $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra. Dafür ist das folgende Verfahren, das beliebige Mengen durch spezielle Gitterfiguren approximiert, hilfreich.

6.5 Lemma (Approximation durch Gitterfiguren). *Betrachte für* $k \in \mathbb{N}_0$ *die Würfelfamilie* $\mathcal{W}_k = \{Q_{k,m} := 2^{-k}(m+[0,1]^n) \,\big|\, m \in \mathbb{Z}^n\}$ *und definiere für* $E \subset \mathbb{R}^n$ *die Mengen*

$$F_k(E) := \bigcup\{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \subset E\},$$
$$F^k(E) := \bigcup\{Q \in \mathcal{W}_k \mid Q \cap E \neq \emptyset\}.$$

Dann gilt:

(i) $F_k(E)$ *und* $F^k(E)$ *sind abgeschlossene Vereinigungen von abzählbar vielen kompakten Quadern mit paarweise disjunktem Inneren.*

(ii) $F_1(E) \subset F_2(E) \subset \ldots \subset E$ *und* $F^1(E) \supset F^2(E) \supset \ldots \supset E$.

(iii) $F_k(E) \supset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}\,(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k}\sqrt{n}\}$
$F^k(E) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}\,(x, E) \leq 2^{-k}\sqrt{n}\}$.

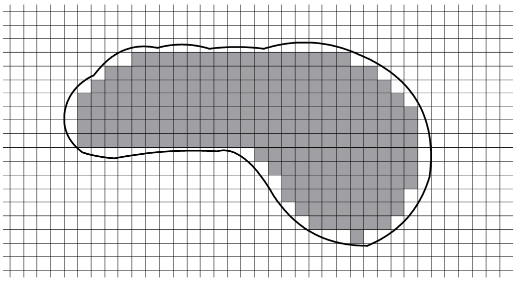
(iv) $\text{int}(E) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k(E) \subset E$ *sowie* $\overline{E} \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(E) \supset E$.

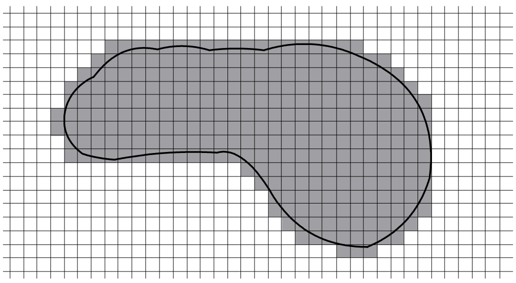
Beweis: Die Würfelfamilie $\mathcal{W}_k$ hat abzählbar viele Elemente. Weiterhin sind die Würfel aus $\mathcal{W}_k$ kompakt, haben paarweise disjunkte Innere und jede beschränkte Menge wird nur von endlich vielen Würfeln aus $\mathcal{W}_k$ getroffen. Insbesondere sind also $F_k(E), F^k(E)$ abgeschlossen. Somit folgt (i).

Nun ist $Q_{k,m}$ die Vereinigung der 2^n Teilwürfel $Q_{k+1,2m+l}$ mit $l \in \{0,1\}^n$, und es gilt

$$\begin{aligned} Q_{k,m} \subset E &\Rightarrow Q_{k+1,2m+l} \subset E \qquad \text{für alle } l \in \{0,1\}^n, \\ Q_{k+1,2m+l} \cap E \neq \emptyset &\Rightarrow Q_{k,m} \cap E \neq \emptyset \qquad \text{wobei } l \in \{0,1\}^n. \end{aligned}$$

Daraus folgt $F_k(E) \subset F_{k+1}(E)$ und $F^k(E) \supset F^{k+1}(E)$. Die fehlenden Inklusionen folgen aus der Definition von $F_k(E)$ und daraus, dass für beliebige $x \in E$ ein $Q \in \mathcal{W}_k$ existiert mit $x \in Q$. Somit ist (ii) bewiesen.





Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass dist $(x, \mathbb{R}^n \setminus E) > 2^{-k}\sqrt{n}$. Dann existiert ein $Q \in \mathcal{W}_k$ mit $x \in Q$, und es folgt wegen diam $(Q) = 2^{-k}\sqrt{n}$

$$Q \subset E \quad \Rightarrow \quad x \in F_k(E)\,.$$

Ist andererseits $x \in F^k(E)$, so gilt $x \in Q$ für ein $Q \in \mathcal{W}_k$ mit $Q \cap E \neq \emptyset$. Also gilt

$$x \in F^k(E) \quad \Rightarrow \quad \text{dist}\,(x, E) \le \text{diam}\,(Q) \le 2^{-k}\sqrt{n},$$

womit beide Behauptungen in (iii) gezeigt sind.

Die Behauptungen aus (iv) folgen sofort aus (iii) und den Definitionen von $\text{int}(E)$ und $\overline{E}$. □

6.6 Lemma. *Die Borelmengen $\mathcal{B}^n$ sind die vom Halbring $\mathcal{Q}^n$ der Quader, dem Ring $\mathcal{F}^n$ der Figuren, und dem System $\mathcal{C}^n$ der* abgeschlossenen Mengen *des $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra, d.h. $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{Q}^n) = \sigma(\mathcal{F}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n)$.*

Beweis: Wir zeigen als erstes, dass jeder Quader eine Borelmenge ist. Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist entweder offen oder läßt sich als abzählbarer Schnitt $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ von offenen Intervallen U_k schreiben und liegt damit in $\mathcal{B}^1$, zum Beispiel gilt $[a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty}(a - \frac{1}{k}, b)$. Für einen Quader $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ schreiben wir $I_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{j,k}$ und erhalten $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty}(U_{1,k} \times \ldots \times U_{n,k}) \in \mathcal{B}^n$. Daraus folgt $\mathcal{Q}^n \subset \mathcal{F}^n \subset \mathcal{B}^n$, da Figuren endliche Vereinigungen von Quadern sind und $\mathcal{B}^n$ $\cup$-stabil ist, und folglich $\sigma(\mathcal{Q}^n) \subset \sigma(\mathcal{F}^n) \subset \mathcal{B}^n$.

Nun ist andererseits nach Lemma 6.5 jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Würfeln darstellbar. Also gilt $\mathcal{O}^n \subset \sigma(\mathcal{Q}^n)$ und somit $\mathcal{B}^n \subset \sigma(\mathcal{Q}^n) \subset \sigma(\mathcal{F}^n)$.

Da die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen Mengen sind gilt offenbar $\sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n)$. Somit ist das Lemma bewiesen. □

6.7 Satz (λ^n-Messbarkeit der Borelmengen). *Für das äußere Lebesguemaß λ^n gilt:*

(i) *Alle Borelmengen sind Lebesgue-messbar.*

(ii) *Zu $E \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Borelmenge $B \supset E$ mit $\lambda^n(B) = \lambda^n(E)$.*

(iii) *$\lambda^n(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.*

Beweis: Nach Satz 5.21 gilt $\mathcal{Q}^n \subset \mathcal{M}(\lambda^n)$, also $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{Q}^n) \subset \mathcal{M}(\lambda^n)$ nach Lemma 6.6 und Satz 3.18. Aussage (ii) gilt nach Bemerkung 5.22 (Satz 4.9). Da $\lambda^n = \text{vol}^n$ auf Quadern, gilt für $a > 0$ beliebig $\lambda^n([-a, a]^n) = \text{vol}^n([-a, a]^n) = (2a)^n < \infty$, und (iii) folgt. □

6.8 Lemma (Approximationslemma). *Für eine beliebige Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ gilt:*

(i) $\lambda^n(E) = \inf\{\lambda^n(U) \,|\, U$ *offen,* $U \supset E\}$,

(ii) $\lambda^n(E) = \sup\{\lambda^n(K) \,|\, K$ *kompakt,* $K \subset E\}$, *falls E λ^n-messbar.*

Beweis: Offensichtlich gilt $\lambda^n(E) \le \inf\{\lambda^n(U) \,|\, U \text{ offen}, U \supset E\}$. Für die umgekehrte Ungleichung können wir $\lambda^n(E) < \infty$ annehmen. Nach Definition des Lebesguemaßes in (6.3) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ mit Quadern P_i, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(P_i) < \lambda^n(E) + \varepsilon \,.$$

Wir können annehmen, dass die P_i offen sind. Also ist $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ offen, es gilt $U \supset E$ und

$$\lambda^n(U) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(P_i) < \lambda^n(E) + \varepsilon \,.$$

Somit ist (i) bewiesen.

In (ii) ist klar, dass $\lambda^n(E) \ge \sup\{\lambda^n(K) \,|\, K \text{ kompakt}, K \subset E\}$. Wir zeigen die umgekehrte Ungleichung zunächst für E beschränkt. Wähle $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $E \subset K_0$. Nach (i) gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supset K_0 \setminus E$ mit

$$\lambda^n(U) < \lambda^n(K_0 \setminus E) + \varepsilon = \lambda^n(K_0) - \lambda^n(E) + \varepsilon \,.$$

Dabei wurde benutzt, dass E λ^n-messbar ist. Nun ist $K := K_0 \setminus U \subset K_0 \setminus (K_0 \setminus E) = E$ kompakt und wegen der λ^n-Messbarkeit von U folgt

$$\lambda^n(K) = \lambda^n(K_0) - \lambda^n(K_0 \cap U) \ge \lambda^n(K_0) - \lambda^n(U) > \lambda^n(E) - \varepsilon.$$

Für E beliebig betrachte $E_j = E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \le j\}$. E_j ist beschränkt und Lebesgue-messbar, also folgt aus obigem

$$\begin{aligned} \lambda^n(E_j) &\le \sup\{\lambda^n(K) \,|\, K \text{ kompakt}, K \subset E_j\} \\ &\le \sup\{\lambda^n(K) \,|\, K \text{ kompakt}, K \subset E\}. \end{aligned}$$

Aber $\lambda^n(E_j) \to \lambda^n(E)$ mit $j \to \infty$ nach Satz 1.17. Damit ist (ii) bewiesen. □

Die λ^n-messbaren Mengen können nun wie folgt charakterisiert werden.

6.9 Satz (Messbarkeit bzgl. λ^n). *Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ^n-messbar, wenn eine der beiden Bedingungen gilt:*

(i) *Es gibt eine Borelmenge $E \supset D$ mit $\lambda^n(E \setminus D) = 0$.*
(ii) *Es gibt eine Borelmenge $C \subset D$ mit $\lambda^n(D \setminus C) = 0$.*

Es kann $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ mit U_i offen, $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_i$ mit A_i abgeschlossen gewählt werden.

Beweis: Die Äquivalenz von (i) bzw. (ii) mit der Messbarkeit von D wurde bereits in Folgerung 4.11 (Bemerkung 5.22) bewiesen. Wir geben hier einen alternativen Beweis, der auch die zusätzliche Charakterisierung von E und C liefert. Schreibe $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ mit $D_j = \{x \in D \,|\, j - 1 \le |x| < j\}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Nach Lemma 6.8 gibt es offene Mengen $U_{i,j}$ und kompakte Mengen $K_{i,j}$ mit $U_{i,j} \supset D_j \supset K_{i,j}$ und

$$\lambda^n(U_{i,j}) < \lambda^n(D_j) + 2^{-j}/i, \quad \lambda^n(K_{i,j}) > \lambda^n(D_j) - 2^{-j}/i\,.$$

Dann ist $U_i := \bigcup_{j=1}^\infty U_{i,j}$ offen, $A_i := \bigcup_{j=1}^\infty K_{i,j}$ abgeschlossen ($K_{i,j} \cap K_{i,m} = \emptyset$ falls $j \neq m$) und es gilt $U_i \supset D \supset A_i$. Mit $E := \bigcap_{i=1}^\infty U_i$ bzw. $C := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ gelten für beliebiges $i \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$\lambda^n(E \setminus D) \le \lambda^n(U_i \setminus D) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda^n(U_{i,j} \setminus D_j) = \sum_{j=1}^\infty (\lambda^n(U_{i,j}) - \lambda^n(D_j)) \le \frac{1}{i},$$

$$\lambda^n(D \setminus C) \le \lambda^n(D \setminus A_i) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda^n(D_j \setminus K_{i,j}) = \sum_{j=1}^\infty (\lambda^n(D_j) - \lambda^n(K_{i,j})) \le \frac{1}{i}.$$

Dabei wurde die Messbarkeit von D_j und $K_{i,j}$ benutzt. Mit $i \to \infty$ folgen die Behauptungen. □

Der folgende Satz liefert eine verblüffende Beziehung zwischen λ^n-messbaren Funktionen, und stetigen Funktionen.

6.10 Satz (Lusin). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\lambda^n(A) < \infty$ und sei die Funktion f λ^n-messbar auf A mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K = K_\varepsilon \subset A$ so, dass*

(i) $\lambda^n(A \setminus K) < \varepsilon$,

(ii) $f|_K$ *ist stetig.*

Beweis: OBdA können wir annehmen, dass f auf ganz A definiert ist, d.h. $f\colon A \to \mathbb{R}$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir $B_{i(2k+1)} := (\frac{k}{i}, \frac{(k+1)}{i}]$, $B_{i(2k)} := (-\frac{k}{i}, -\frac{k-1}{i}]$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann sind $B_{i(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Intervalle mit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{i(j)} = \mathbb{R}$ und $\operatorname{diam}(B_{i(j)}) = \frac{1}{i}$. Die Mengen $A_{ij} := f^{-1}(B_{i(j)})$ sind Lebesgue-messbar und es gilt $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{ij}$. Auf Grund von Lemma 6.8 existieren kompakte Mengen $K_{ij} \subseteq A_{ij}$ mit $\lambda^n(A_{ij} \setminus K_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\lambda^n\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^\infty K_{ij}\right) &= \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_{ij} \setminus \bigcup_{l=1}^\infty K_{il}\right)\\ &\le \lambda^n\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_{ij} \setminus K_{ij})\right) < \frac{\varepsilon}{2^i}\,.\end{aligned}$$

Satz 1.17 (ii) liefert $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda^n\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^N K_{ij}\right) = \lambda^n\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^\infty K_{ij}\right)$ und somit existiert eine Zahl $N(i)$ mit

$$\lambda^n\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^i}\,.$$

Die Menge $D_i := \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}$ ist kompakt. Für alle i, j wählen wir ein $b_{ij} \in B_{ij}$ und definieren $g_i : D_i \to \mathbb{R}$ durch $g_i(x) := b_{ij}$ für $x \in K_{ij}$ $(j \le N(i))$. Da $K_{i1}, \dots, K_{iN(i)}$ kompakte disjunkte Mengen sind haben sie einen positiven Abstand voneinander. Also ist g_i stetig. Aufgrund der Konstruktion haben wir

$$|f(x) - g_i(x)| \le \frac{1}{i}\,. \tag{6.11}$$

für alle $x \in D_i$. Wir setzen $K := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$. Diese Menge ist kompakt und es gilt

$$\lambda^n(A \setminus K) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \setminus D_i) < \varepsilon\,.$$

Aus (6.11) und der Definition von K folgt, dass g_i gleichmäßig gegen f auf K konvergiert. Also ist $f|_K$ stetig. □

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich das Lebesguemaß unter affinlinearen Abbildungen transformiert. Dafür ist der folgende Begriff nützlich.

6.12 Definition. *Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt* Borelmaß*, falls gilt:*

(i) *Alle Borelmengen sind μ-messbar.*

(ii) *$\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$.*

6.13 Beispiel. Das äußere Lebesguemaß λ^n ist ein Borelmaß nach Satz 6.7. Mit Satz 3.11 ist dann auch für jede Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ das äußere Maß $\lambda^n \llcorner E$ ein Borelmaß.

Ein äußeres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ heißt *translationsinvariant*, wenn mit $E + a := \{x + a \,|\, x \in E\}$ gilt:

$$\mu(E + a) = \mu(E) \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n,\ E \subset \mathbb{R}^n.$$

Aus der Translationsinvarianz des Elementarinhalts $\mathrm{vol}^n : \mathcal{Q}^n \to [0, \infty)$ und der Definition des Lebesguemaßes folgt sofort, das λ^n ein translationsinvariantes äußeres Maß ist. In Satz 6.15 unten wird gezeigt, dass ein Borelmaß λ^n durch die Eigenschaft der Translationsinvarianz bis auf Normierung eindeutig charakterisiert ist.

6.14 Lemma. *Ist μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, so ist jede Koordinatenhyperebene $H := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i = c\}$, $i = 1, \dots, n$, eine μ-Nullmenge.*

Beweis: Sei $Q = [0, 1]^n$ und $F = \{x \in Q \,|\, x_i = 0\}$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ ist $F + a$ abgeschlossen, also μ-messbar. Es folgt für jede endliche Menge $\{s_1, \dots, s_k\} \subset [0, 1]$

$$k\,\mu(F) = \sum_{j=1}^{k} \mu(s_j e_i + F) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} s_j e_i + F\right) \le \mu(Q) < \infty.$$

Da k beliebig groß gewählt werden kann, ist $\mu(F) = 0$. Aber H ist Vereinigung von abzählbar vielen Translationen von F, und somit $\mu(H) = 0$. □

6.15 Satz (Charakterisierung durch Translationsinvarianz). *Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt mit $\theta := \mu([0,1]^n)$*

$$\mu(E) = \theta\,\lambda^n(E) \qquad \textit{für alle } \lambda^n\textit{-messbaren } E \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Beweis: Setze $Q_{k,j} = 2^{-k}(j + [0,1]^n)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \mathbb{Z}^n$. Dann ist $[0,1]^n$ Vereinigung der 2^{nk} abgeschlossenen Teilwürfel $\{Q_{k,j} \,\big|\, j \in J_k\}$, wobei $J_k = \{j = (j_1,\ldots,j_n) \in \mathbb{Z}^n \,\big|\, 0 \leq j_i \leq 2^k - 1\}$, mit paarweise disjunktem Inneren. Aus Lemma 6.14 folgt

$$\mu([0,1])^n = \sum_{j \in J_k} \mu(Q_{k,j}), \quad \lambda^n([0,1]^n) = \sum_{j \in J_k} \lambda^n(Q_{k,j})\,.$$

Die Translationsinvarianz impliziert $\mu(Q_{k,j}) = \mu(Q_{k,0})$ und $\lambda^n(Q_{k,j}) = \lambda^n(Q_{k,0})$ für alle $j \in \mathbb{Z}^n$, also

$$\theta = \frac{\mu([0,1]^n)}{\lambda^n([0,1]^n)} = \frac{\mu(Q_{k,0})}{\lambda^n(Q_{k,0})} = \frac{\mu(Q_{k,j})}{\lambda^n(Q_{k,j})} \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^n.$$

Daraus folgt mit Lemma 6.5 wobei wieder Lemma 6.14 benutzt wird,

$$\mu(U) = \theta\,\lambda^n(U) \qquad \text{für alle offenen } U \subset \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere gilt die Behauptung des Satzes für alle Quader, und damit für alle λ^n-messbaren Mengen aufgrund der Eindeutigkeit der Maßfortsetzung (Satz 4.10). □

Wir zeigen als nächstes die Messbarkeit von Bildmengen, wobei wir uns im Hinblick auf die spätere Anwendung im Transformationssatz für Diffeomorphismen nicht auf lineare Abbildungen beschränken.

6.16 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante Λ bzgl. der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt*

$$\lambda^n(f(E)) \leq \Lambda^n\,\lambda^n(E) \qquad \textit{für alle } E \subset U\,.$$

Beweis: Wir können $\lambda^n(E) < \infty$ annehmen. Setze

$$Q(x_0,\varrho) = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|x - x_0\|_\infty < \varrho\} \qquad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \varrho > 0\,.$$

Nach Voraussetzung gilt $\|f(x) - f(x_0)\|_\infty \leq \Lambda\,\|x - x_0\|_\infty$ für $x, x_0 \in U$, also

$$Q = Q(x_0,\varrho) \subset U \quad \Rightarrow \quad f(Q) \subset Q(f(x_0),\Lambda\varrho)\,.$$

Nach Lemma 6.8 gibt es nun eine offene Menge $V \supset E$ mit $\lambda^n(V) < \lambda^n(E) + \varepsilon$, wobei oBdA $V \subset U$, und weiter eine Ausschöpfung $V = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ durch Würfel Q_j mit paarweise disjunktem Inneren, siehe Lemma 6.5. Damit folgt

$$\lambda^n(f(E)) \le \lambda^n(f(V)) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(f(Q_j)) \le \Lambda^n \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) \le \Lambda^n\big(\lambda^n(E) + \varepsilon\big)\,.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

6.17 Satz (λ^n-Messbarkeit von Bildmengen). *Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt:*

(i) $N \subset U$ *λ^n-Nullmenge* $\quad\Rightarrow\quad$ $f(N)$ *λ^n-Nullmenge.*

(ii) $E \subset U$ *λ^n-messbar* $\quad\Rightarrow\quad$ $f(E)$ *λ^n-messbar.*

Beweis: Nach Lemma 6.5 kann U schreiben als $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, wobei K_i komapkte Würfel sind. Somit gilt $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cap N$ und da f auf kompakten Teilmengen von U Lipschitzstetig ist, folgt Aussage (i) direkt aus Lemma 6.16. Für (ii) können wir annehmen, dass E beschränkt ist, andernfalls betrachten wir $E_n = \{x \in E \,\big|\, |x| \le n\}$. Nach Satz 6.9 gibt es dann kompakte Mengen A_j und eine λ^n-Nullmenge N mit $E = \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \cup N$. Da $f(A_j)$ kompakt und $\lambda^n(f(N)) = 0$ nach Behauptung (i), ist $f(E)$ λ^n-messbar. $\square$

6.18 Satz (Bewegungsinvarianz von λ^n). *Für $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\lambda^n(S(E) + a) = \lambda^n(E) \text{ für alle } E \subset \mathbb{R}^n.$$

Beweis: Die Translationsinvarianz von λ^n ist schon bekannt, also können wir $a = 0$ annehmen. Wir setzen zunächst nur $S \in GL(\mathbb{R}^n)$ voraus und betrachten mit $T = S^{-1}$ das Bildmaß

$$\mu = T(\lambda^n) : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty],\ \mu(E) = \lambda^n(T^{-1}(E)) \quad\Rightarrow\quad \lambda^n(S(E)) = \mu(E)\,.$$

Wir behaupten, dass μ ein translationsinvariantes Borelmaß ist. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ Borelmenge und damit λ^n-messbar nach Satz 6.7, so ist $T^{-1}(B) = S(B)$ ebenfalls λ^n-messbar wegen Satz 6.17 und damit B μ-messbar nach Satz 3.9. Für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist auch $T^{-1}(K) = S(K)$ kompakt, also $\mu(K) < \infty$. Damit ist gezeigt, dass μ ein Borelmaß ist. Für die Translationsinvarianz berechnen wir für $b \in \mathbb{R}^n$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ beliebig

$$\mu(E + b) = \lambda^n(S(E + b)) = \lambda^n(S(E) + S(b)) = \lambda^n(S(E)) = \mu(E)\,.$$

Aus Satz 6.15 folgt nun $\mu(E) = \theta(S)\,\lambda^n(E)$ für alle λ^n-messbaren $E \subset \mathbb{R}^n$, wobei

$$\theta(S) = \mu([0,1]^n) = \lambda^n(S([0,1]^n)) \in [0,\infty)\,.$$

Für nicht notwendig messbares $E \subset \mathbb{R}^n$ schließen wir mit Lemma 6.8

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \lambda^n(S(E))\\ &= \inf\{\lambda^n(V) \,\big|\, S(E) \subset V \text{ offen}\}\\ &= \inf\{\lambda^n(S(U)) \,\big|\, E \subset U \text{ offen}\}\\ &= \inf\{\mu(U) \,\big|\, E \subset U \text{ offen}\}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, wieder mit Lemma 6.8,

$$\lambda^n(S(E)) = \theta(S)\,\lambda^n(E) \quad \text{für alle } E \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.19}$$

Ist nun sogar $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$, so setzen wir in (6.19) als Testmenge $E = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| < 1\}$ ein und erhalten

$$\theta(S)\,\lambda^n(B_1(0)) = \lambda^n(S(B_1(0))) = \lambda^n(B_1(0))\,.$$

Da $\lambda^n(B_1(0)) > 0$ folgt $\theta(S) = 1$ für $S \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und der Satz ist bewiesen. □

Der Elementarinhalt vol^n ist nur für achsenparallele Quader bzw. Figuren definiert worden. Deshalb ist aus der Definition 6.2 von λ^n nicht unmittelbar ersichtlich, dass das Lebesguemaß unabhängig von der Wahl des Euklidischen Koordinatensystems ist, sondern dies folgt erst aus dem vorangegangenen Satz 6.18. Für die Transformationsformel unter beliebigen linearen Abbildungen $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ benötigen wir die folgende Hilfsaussage aus der Linearen Algebra.

6.20 Lemma (Polarzerlegung). *Zu jedem $S \in GL_n(\mathbb{R})$ gibt es eine Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, und $T_1, T_2 \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$, so dass $S = T_1 \Lambda T_2$.*

Beweis: Die Matrix $S^\top S$ ist symmetrisch und hat positive Eigenwerte, denn für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\langle S^\top S v, v\rangle = |Sv|^2 > 0$. Also gibt es ein $T \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ und eine Diagonalmatrix Λ mit Einträgen $\lambda_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, so dass gilt:

$$S^\top S = T\Lambda^2 T^{-1}.$$

Die Matrix $R = T\Lambda T^{-1}$ ist symmetrisch mit $R^2 = S^\top S$. Dann ist aber $Q = SR^{-1}$ orthogonal, denn

$$Q^\top Q = R^{-\top} S^\top S R^{-1} = R^{-1} R^2 R^{-1} = E_n\,.$$

Es folgt $S = QR = QT\Lambda T^{-1} = T_1 \Lambda T_2$ für $T_1 = QT, T_2 = T^{-1} \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ wie verlangt. □

6.21 Satz (Lineare Transformationsformel). *Für eine lineare Abbildung $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt*

$$\lambda^n(S(E)) = |\det(S)|\,\lambda^n(E) \qquad \textit{für alle } E \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Beweis: Ist $\det(S) = 0$, so liegt $S(E)$ in einer Hyperebene und die Behauptung ist richtig. Für $\det(S) \neq 0$ haben wir aus dem Beweis von Satz 6.18 bereits die Aussage (6.19) zur Verfügung und müssen dort nur zeigen:

$$\theta(S) = |\det(S)|\,.$$

Dies stimmt für eine Diagonalmatrix Λ mit positiven Einträgen $\lambda_i > 0$, $i = 1,\dots,n$, denn

$$\theta(\Lambda) = \lambda^n(\Lambda([0,1]^n) = \lambda^n([0,\lambda_1] \times \ldots \times [0,\lambda_n]) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\det(\Lambda)|.$$

Für $S \in GL_n(\mathbb{R})$ beliebig sei $S = T_1 \Lambda T_2$ mit einer Diagonalmatrix Λ und $T_1, T_2 \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^n)$ wie in Lemma 6.20. Aus den schon bekannten Aussagen für orthogonale sowie Diagonalmatrizen folgt

$$\theta(S) = \lambda^n(T_1 \Lambda T_2([0,1]^n)) = |\det(\Lambda)| = |\det(S)|\,,$$

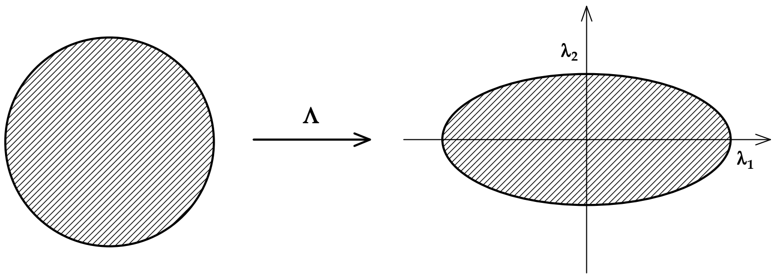
und der Satz ist bewiesen. □

6.22 Beispiel (Volumen eines Ellipsoids). Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ ist die Menge

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n}{\lambda_n}\right)^2 < 1 \right\}$$

ein Ellipsoid mit den Halbachsen $\lambda_i > 0$. Mit $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| < 1\}$ gilt $E = \Lambda(B_1(0))$, wobei $\Lambda \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen λ_i ist. Aus Satz 6.21 folgt

$$\lambda^n(E) = \lambda^n(\Lambda(B_1(0))) = (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)\ \lambda^n(B_1(0))\,.$$



Zum Ende des Kapitels geben wir ein Standardbeispiel für die Existenz von nicht messbaren Mengen an.

6.23 Beispiel (Vitali 1905). Es gibt eine Menge $S \subset [0,1]$, die nicht λ^1-messbar ist. Betrachte dazu auf $[0,1]$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}\,.$$

Mit dem Auswahlaxiom der Mengenlehre erhalten wir ein Repräsentantensystem $S \subset [0,1]$ für die Relation $\sim$, d. h. zu jedem $y \in [0,1]$ gibt es genau ein $x \in S$ mit $x \sim y$. Sei nun $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Dann gilt

$$(q_j + S) \cap (q_k + S) = \emptyset \qquad \text{für } j \neq k\,.$$

Denn andernfalls gibt es $x_1, x_2 \in S$ mit $q_j + x_1 = q_k + x_2$, also $x_2 - x_1 = q_j - q_k \in \mathbb{Q}$. Nach Definition von S folgt dann $x_1 = x_2$, also $q_j = q_k$ im Widerspruch zur Annahme. Zweitens behaupten wir

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k + S) \subset [-1,2]\,.$$

Die rechte Inklusion ist trivial. Die linke Inklusion folgt aus der Definition von S, denn zu $y \in [0,1]$ gibt es ein $x \in S$ mit $y - x =: q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.

Nun ist $\lambda^1(q+S) = \lambda^1(S)$ wegen der Translationsinvarianz von λ^1. Wäre S und damit jede der Mengen $q_k + S$ λ^1-meßbar, so folgt aus den obigen beiden Aussagen und der σ-Additivität (Satz 3.18)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^1(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^1(q_k + S) = \lambda^1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (q_k + S)\right) \in [1,3].$$

Das ist aber unmöglich, da links die Zahl $\lambda^1(S) \in [0,\infty)$ unendlich oft addiert wird.

2 Integration

Ziel dieses Kapitels ist die Definition des Lebesgueintegrals bezüglich eines Maßes μ auf einer Menge X. Danach werden fundamentale Sätze und Eigenschaften besprochen. Insbesondere werden Konvergenzsätze, der Transformationssatz, die Sätze von Fubini, Gauß und Radon–Nikodym, sowie L^p-Räume, Produktmaße und Flächenmaße behandelt.

2.7 Das Lebesgueintegral

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition des Lebesgueintegrals bezüglich eines Maßes μ auf einer Menge X. Das Integral einer nichtnegativen Funktion kann schon dann definiert werden, wenn die Funktion messbar ist. Hierzu wird die Funktion von unten durch nichtnegative Treppenfunktionen approximiert; für diese ist das Integral elementar erklärt. Das Integral einer beliebigen, messbaren Funktion f ergibt sich dann durch die Zerlegung in den Positiv- und Negativanteil.

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ immer ein Maßraum. Alternativ kann man ein äußeres Maß $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ auf X betrachten. Dann ist in den folgenden Aussagen $\mathcal{A}$ durch die σ-Algebra $\mathcal{M}(\mu)$ der μ-messbaren Mengen zu ersetzen. Da der Maßraum fest ist werden wir im Weiteren von der explixiten Angabe der σ-Algebra $\mathcal{A}$ und des Maßes μ oft absehen.

Grundbaustein des Integrals sind messbare Funktionen, die bereits in Abschnitt 1.2 behandelt wurden. Wir erinnern daran, dass eine (numerische) Funktion f *$\mathcal{A}$-messbar* ist, wenn es eine Menge $D \in \mathcal{A}$ gibt, so dass f auf D, mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, definiert ist, und wenn für alle $s \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f > s\} := \{x \in D \,|\, f(x) \in (s, \infty]\} \in \mathcal{A}$. Eine (numerische) Funktion f ist *μ-messbar (auf $D \in \mathcal{A}$)*, wenn es eine Menge $\tilde{D} \in \mathcal{A}$ gibt, so dass f auf $\tilde{D}$, mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$, definiert ist, $\mu(D \setminus \tilde{D}) = 0$, und f *$\mathcal{A}|_{\tilde{D}}$-messbar* ist. Wir werden später meist den Fall $D = X$ betrachten. Falls nichts anderes angegeben wird setzen wir im Weiteren voraus, dass alle auftretenden Funktionen *numerische Funktionen* sind. Typische Beispiele messbarer Funktionen waren *Indikatorfunktionen* von Mengen $E \in \mathcal{A}$, wobei $\chi_E : X \to \mathbb{R}$, durch

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in E\,, \\ 0 & \text{sonst} \;\;, \end{cases}$$

definiert ist.

Wir führen nun eine für den Aufbau des Integrals wichtige Klasse von Funktionen ein.

7.1 Definition. *Sei $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum. Wir nennen eine Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$* Treppenfunktion *(bzw. genauer $\mathcal{C}$-*Treppenfunktion*), wenn sie als eine endliche Linearkombination von Indikatorfunktionen von Mengen aus $\mathcal{C}$ darstellbar ist, d.h. es gibt $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{C}$ mit*

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} .$$

Treppenfunktionen nehmen also nur endlich viele Werte an. Man überlegt sich leicht, dass sie einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bilden. Der folgende Approximationssatz wird benötigt, um Aussagen für Treppenfunktionen auf beliebige messbare Funktionen zu übertragen.

7.2 Satz (Approximation durch Treppenfunktionen). *Sei $(Y, \mathcal{C})$ ein messbarer Raum. Für jede nichtnegative $\mathcal{C}$-messbare Funktion $f : Y \to [0, \infty]$ existiert eine monoton steigende Folge (f_n) nichtnegativer Treppenfunktionen mit $f_n \nearrow f$ in Y.*

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ und $k = 1, 2, \ldots, m2^m$ setzen wir

$$F_{m,k} := \left\{ x \in Y \,\middle|\, \frac{k-1}{2^m} \le f(x) < \frac{k}{2^m} \right\}$$

und definieren

$$f_m(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^m}, & \text{falls } x \in F_{m,k} , \\ m, & \text{falls } x \in Y \setminus \bigcup_k F_{m,k} . \end{cases}$$

Offensichtlich sind f_m Treppenfunktionen, für die für alle $x \in Y$ gilt $f_m(x) \nearrow f(x)$. □

Das Integral der Indikatorfunktion eines beliebigen Intervalls ist gleich seiner Länge. Demzufolge ist es natürlich für das Lebesgueintegral

$$\int_X \chi_A \, d\mu = \mu(A), \qquad A \in \mathcal{A} ,$$

zu fordern. Darüber hinaus sollten Linearität und Monotonie des Integrals gelten und das System der integrierbaren Funktionen so groß wie möglich sein. Treppenfunktionen haben immer eine Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

mit $\beta_j \in \mathbb{R},\ B_j \in \mathcal{A}$, wobei B_j paarweise disjunkt sind. Im Weiteren nehmen wir an, dass Treppenfunktionen durch eine solche Darstellung gegeben sind. Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig.

7.3 Lemma. *Seien $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ und $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen und seien α_i, β_j nichtnegative reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) \le \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j)\,.$$

Beweis: Wir setzen $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i$, $B_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^n B_j$. Für $i \in \{0, \ldots, m\}$, $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt entweder $A_i \cap B_j = \emptyset$ oder $\alpha_i \le \beta_j$ und somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) &\le \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &\le \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(B_j)\,. \end{aligned}$$ □

Lemma 7.3 zeigt, dass die folgende Definition des Integrals einer nichtnegativen Treppenfunktion unabhängig von ihrer Darstellung ist.

7.4 Definition. *Sei $D \in \mathcal{A}$ und s eine nichtnegative Treppenfunktion mit einer Darstellung $s = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j}$, wobei $B_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind und $\beta_j \ge 0$. Wir setzen*

$$\int_D s\,d\mu := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(D \cap B_j)\,.$$

Nach Satz 7.2 existiert für jede nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion f auf $D \in \mathcal{A}$ eine Folge von Treppenfunktionen $s_n \ge 0$ mit $s_n \nearrow f$. Beliebige Funktionen f haben die Darstellung $f = f^+ - f^-$, wobei f^+, f^- nichtnegative Funktionen sind. Somit definieren wir das Lebesgueintegral wie folgt:

7.5 Definition. *Für eine nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion $f \ge 0$ auf $D \in \mathcal{A}$ setzen wir*

$$\int_D f\,d\mu := \sup\left\{ \int_D s\,d\mu \,\Big|\, 0 \le s \le f \text{ auf } D, s \text{ Treppenfunktion} \right\}.$$

Für eine beliebige $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion f auf $D \in \mathcal{A}$ definieren wir das Lebesgueintegral *durch*

$$\int_D f\,d\mu := \int_D f^+\,d\mu - \int_D f^-\,d\mu\,,$$

falls wenigstens eins der Integrale auf der rechten Seite endlich ist.

Lemma 7.3 zeigt wiederum, dass die Definitionen 7.4 und 7.5 im Falle einer Treppenfunktion f übereinstimmen.

7.6 Bemerkung. Sei f eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion auf $D \in \mathcal{A}$ und sei $N \subset D$ eine Nullmenge. Dann folgt sofort aus der Definition des Lebesgueintegrals, dass $\int_N f d\mu = 0$.

7.7 Bemerkung. Sei f eine auf X definierte numerische Funktion und sei $M \in \mathcal{A}$. Dann folgt offensichtlich aus der Defintion 7.5

$$\int_M f\, d\mu = \int_X f\chi_M\, d\mu\,,$$
$$\int_M f\, d\mu = \int_M f\, d\mu|_M\,,$$

wobei $\mu|_M$ die Restriktion des Maßes μ auf die von $\mathcal{A}$ auf M induzierte σ-Algebra $\mathcal{A}|_M$ ist. Also ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit wenn wir im Weiteren nur Integrale über ganz X betrachten.

Das Herzstück der Lebesgueschen Integraltheorie ist der folgende Spezialfall des Satzes über monotone Konvergenz. Mit seiner Hilfe können wir beweisen, dass das Lebesgueintegral monoton und linear ist.

7.8 Satz (monotone Konvergenz). *Seien $f_n \geq 0$ $\mathcal{A}$-messbare Funktionen auf X mit $f_n \nearrow f$, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu\,.$$

Beweis: Die Funktion f ist als Grenzwert $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen wiederum $\mathcal{A}$-messbar (Satz 2.9) und nichtnegativ. Also sind alle Integrale definiert. Aus $f_n \leq f_{n+1}$ und der Definition 7.5 folgt, dass $\left(\int_X f_n\, d\mu\right)$ eine nichtfallende Folge reeller Zahlen ist, deren Grenzwert wir mit α bezeichnen, d.h. $\alpha = \lim \int_X f_n\, d\mu$. Da $f_n \leq f$ gilt erhalten wir $\alpha \leq \int_X f\, d\mu$. Falls $\alpha = \infty$ ist die Behauptung des Satzes klar. Sei nun $\alpha < \infty$ und sei s eine Treppenfunktion mit $0 \leq s \leq f$. Wir werden in mehreren Schritten zeigen, dass $\int_X s\, d\mu \leq \alpha$ ist, was sofort die Behauptung liefert.

(a) Sei $\tau \in (0,1)$ und sei $E_n := \{x \in X \,|\, f_n(x) \geq \tau\, s(x)\}$. Dann ist $E_n \in \mathcal{A}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = X$. In der Tat, falls $f(x) = 0$ dann ist $x \in E_1$; falls $f(x) > 0$, dann ist $\tau s(x) < \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in E_n$. Folgerung 3.19 (ii) liefert für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n \cap A) = \mu(A)\,.$$

(b) Sei $s = \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}$, wobei $B_j \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind. Dann haben wir

$$\int_X f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} f_n\, d\mu \geq \int_{E_n} \tau s\, d\mu = \tau \int_{E_n} \sum_{j=1}^k \beta_j \chi_{B_j}\, d\mu$$
$$= \tau \sum_{j=1}^k \beta_j \mu(B_j \cap E_n)\,.$$

(c) Wenn wir in dieser Ungleichung zur Grenze $n \to \infty$ übergehen erhalten wir unter Benutzung von (a)

$$\alpha \geq \tau \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu(B_j) = \tau \int_X s \, d\mu \, .$$

Da $\tau \in (0,1)$ beliebig war erhalten wir $\alpha \geq \int_X s \, d\mu$. □

7.9 Lemma. *Seien f_1, f_2 nichtnegative $\mathcal{A}$-messbare Funktionen auf X. Dann gilt:*

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \, .$$

Beweis: Seien zunächst f_1, f_2 Treppenfunktionen. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_0, \ldots, A_m$, $B_0, \ldots, B_n$ und nichtnegative reelle Zahlen α_i, β_j mit $\bigcup_{i=0}^m A_i = \bigcup_{j=0}^n B_j = X$ und $f_1 = \sum_{i=0}^m \alpha_i \chi_{A_i}$, $f_2 = \sum_{j=0}^n \beta_j \chi_{B_j}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mu(B_j) \\
&= \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \, .
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall finden wir mit Satz 7.2 Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen $\{s_n^1\}, \{s_n^2\}$ mit $s_n^1 \nearrow f_1$, $\quad s_n^2 \nearrow f_2$ und benutzen den gerade bewiesenen Spezialfall sowie Satz 7.8. □

7.10 Bemerkung. Sei f nur μ-messbar auf X ist, d.h. es existiert ein $A \in \mathcal{A}$, so dass f auf A definiert ist und $\mu(X \setminus A) = 0$. Motiviert durch Bemerkung 2.14 und Bemerkung 7.6 setzen wir

$$\int_X f \, d\mu := \int_A f \, d\mu \, ,$$

falls das Integral auf der rechten Seite definiert ist.

Somit können wir Lemma 7.9 auf μ-messbare Funktionen erweitern.

7.11 Lemma. *Seien f_1, f_2 nichtnegative μ-messbare Funktionen auf X. Dann gilt:*

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu \, .$$

Beweis: Seien f_i, $i = 1, 2$, auf $D_i \in \mathcal{A}$ definiert, wobei $\mu(X \setminus D_i) = 0$. Dann ist $f_1 + f_2$ auf $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{A}$ definiert. Mit Bemerkung 7.10, Lemma 7.9 angewendet auf $X = D_1 \cap D_2$ folgt

$$\int_X (f_1 + f_2)\, d\mu = \int_{D_1 \cap D_2} (f_1 + f_2)\, d\mu$$
$$= \int_{D_1 \cap D_2} f_1\, d\mu + \int_{D_1 \cap D_2} f_2\, d\mu\,.$$

Bemerkung 7.7, Bemerkung 7.6 und Lemma 7.9 implizieren

$$\int_{D_1 \cap D_2} f_1\, d\mu = \int_{D_1} f_1 \chi_{D_1 \cap D_2}\, d\mu + \int_{D_1} f_1 \chi_{D_1 \setminus D_2}\, d\mu$$
$$= \int_{D_1} f_1\, d\mu = \int_X f_1\, d\mu\,.$$

Dies und eine analoge Rechnung für f_2 liefern dann die Behauptung. □

7.12 Definition. *Die Menge aller μ-messbaren numerischen Funktionen f auf X, deren Integral definiert ist wird mit $\mathcal{L}^*(\mu)$ oder $\mathcal{L}^*$ bezeichnet. Weiter bezeichnen wir*

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) \,\middle|\, \int_X f\, d\mu \ \in \mathbb{R} \right\},$$

und sagen, dass Elemente $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ integrierbare Funktionen *sind.*

Die Existenz und der Wert des Integrals bleiben unberührt, wenn eine Funktion auf einer Nullmenge abgeändert wird.

7.13 Lemma. *Sei $g \in \mathcal{L}^*$ und f eine μ-messbare Funktion mit $f = g$ μ-fast-überall. Dann gilt:*

$$f \in \mathcal{L}^*(\mu) \qquad \textit{und} \qquad \int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu\,.$$

Die Behauptung gilt auch falls μ ein vollständiges Maß ist, $g \in \mathcal{L}^*$ und $f = g$ μ-fast-überall.

Beweis: Sei g auf $A \in \mathcal{A}$ und f auf $B \in \mathcal{A}$ definiert, wobei $\mu(X \setminus A) = \mu(X \setminus B) = 0$. Sei $D \in \mathcal{A}$ mit $D \subset A \cap B$ so, dass $f = g$ auf D und $\mu(X \setminus D) = 0$. Dann gilt mit Bemerkung 7.10, Definition 7.5, Lemma 7.9, $\mu(A \setminus D) = \mu(B \setminus D) = 0$ und Bemerkung 7.6:

$$\int_X g\, d\mu = \int_A g\, d\mu = \int_D g\, d\mu = \int_D f\, d\mu = \int_B f\, d\mu,$$

und also ist $\int_X f\, d\mu$ definiert. Sei nun μ ein vollständiges Maß. Dann liefert Lemma 2.15 dass auch f μ-messbar ist und somit können wir weiter wie eben argumentieren. □

Die folgende Abschätzung wird sehr oft benutzt.

7.14 Lemma (Tschebyscheff-Ungleichung). *Ist $f \geq 0$ μ-messbar auf X und $\int_X f\,d\mu < \infty$, so gilt*

$$\mu(\{f \geq s\}) \leq \begin{cases} \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_X f\,d\mu & \text{für } s \in (0,\infty)\,, \\ 0 & \text{für } s = \infty\,. \end{cases}$$

Beweis: Sei f auf $D \in \mathcal{A}$ definiert mit $\mu(X \setminus D) = 0$. Im Fall $s \in (0,\infty)$ ist die Funktion $s\chi_{\{f\geq s\}}$ eine Treppenfunktion mit $0 \leq s\chi_{\{f\geq s\}} \leq f$, also folgt

$$s\,\mu(\{f \geq s\}) = \int_X s\chi_{\{f\geq s\}}\,d\mu \leq \int_D f\,d\mu = \int_X f\,d\mu\,.$$

Der Fall $s = \infty$ ergibt sich hieraus durch Grenzübergang, mithilfe von Folgerung 1.17 (ii). $\square$

7.15 Folgerung. *Sei $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$.*

(i) *Ist $\int_X f\,d\mu < \infty$ (bzw. $\int_X f\,d\mu > -\infty$), so folgt $f(x) < \infty$ (bzw. $f(x) > -\infty$) für μ-fast-alle $x \in X$.*

(ii) *Ist $f \geq 0$ und $\int_X f\,d\mu = 0$, so gilt $f(x) = 0$ für μ-fast-alle $x \in X$.*

Beweis: Aussage (i) folgt mit $s = \infty$ aus Lemma 7.14, angewandt auf f^+ bzw. f^-. In (ii) schließen wir $\mu(\{f \geq s\}) = 0$ für $s > 0$ aus Lemma 7.14, also $\mu(\{f > 0\}) = 0$ mit Satz 1.17 (ii). $\square$

Folgende Varianten von Aussage (ii) sind oft sehr nützlich.

7.16 Folgerung. *Seien $f, g, \in \mathcal{L}^1$.*

(i) *Falls $\int_A f d\mu = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$, dann ist $f = 0$ μ-fast-überall.*

(ii) *Aus*

$$\int_A f\ d\mu \leq \int_A g\ d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, folgt, dass $f \leq g$ μ-fast-überall.

Beweis: (i) Sei $B := \{f \geq 0\}$. Dann gilt

$$0 = \int_B f\,d\mu = \int_B f^+\,d\mu\,,$$

und Folgerung 7.15 (ii) impliziert $f^+ = 0$ fast überall. Analog zeigt man $f^- = 0$ fast überall. Aus der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ folgt dann die Behauptung.

(ii) Setze $h := (f-g)^+$. Dann ist $h \geq 0$ und es gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$0 \leq \int_A h\,d\mu = \int_{A\cap\{h>0\}} f - g\,d\mu \leq 0\,.$$

Also gilt nach (i) $(f-g)^+ = 0$ fast überall, d.h. $f - g \leq 0$ fast überall. $\square$

7.17 Satz. *Es gelten:*

(i) *Für* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ist* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu + \beta \int_X g\, d\mu\,.$$

(ii) *Aus* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *folgt* $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und die Abschätzung:*

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \le \int_X |f|\, d\mu\,.$$

(iii) *Aus* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *folgt* $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(iv) *Sei* f μ*-messbar,* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und gelte* $|f| \le g$*, dann ist auch* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int_X f\, d\mu \le \int_X |f|\, d\mu \le \int_X g\, d\mu\,.$$

Beweis: (i) Wir zeigen zuerst dass $\int_X \alpha f\, d\mu = \alpha \int_X f\, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{L}^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Für $\alpha = 0$ ist dies trivial. Für beliebige $\alpha \ge 0$ und nichtnegative Treppenfunktionen f folgt dies sofort aus Definition 7.4. Somit folgt für $\alpha > 0$ und beliebige nichtnegative μ-messbare Funktionen $f \ge 0$ (oBdA sei f auf X definiert)

$$\begin{aligned}
\int_X \alpha f\, d\mu &= \sup \left\{ \int_X s\, d\mu \,\middle|\, 0 \le s \le \alpha f, s \text{ Treppenfunktion} \right\} \\
&= \sup \left\{ \alpha \int_X \frac{s}{\alpha}\, d\mu \,\middle|\, 0 \le \frac{s}{\alpha} \le f, s \text{ Treppenfunktion} \right\} \\
&= \alpha \sup \left\{ \int_X t\, d\mu \,\middle|\, 0 \le t \le f, t \text{ Treppenfunktion} \right\} \\
&= \alpha \int_X f\, d\mu\,.
\end{aligned}$$

Auf Grund der Definition des Integrals 7.5 und $(\alpha f)^- = (-\alpha) f$ kann auch der Fall $\alpha < 0$ und $f \ge 0$ auf den gerade betrachteten Fall zurückgeführt werden. Der allgemeine Fall $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1$ folgt nun mithilfe der Zerlegung $f = f^+ - f^-$ und der Definition des Integrals 7.5.

Es reicht also als zweites den Fall $\alpha = \beta = 1$ zu behandeln. Für $f, g \in \mathcal{L}^1$ schreiben wir $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ und $h := f + g$ (aufgrund von Folgerung 7.15 ist h fast überall definiert und somit nach Bemerkung 2.14 μ-messbar). Es gilt:

$$h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

und Lemma 7.11 liefert, da alle Funktionen μ-messbar und nichtnegativ sind,

$$\int_X h^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu + \int_X g^-\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu + \int_X h^-\, d\mu\,.$$

Die Behauptung folgt nun, wenn wir beachten, das $\int_X h^+ \, d\mu$ und $\int_X h^- \, d\mu$ endlich sind. Dies ist aber der Fall, da

$$0 \le h^+ = (f+g)^+ \le f^+ + g^+$$

und die rechte Seite eine integrierbare Funktion ist. Analog für h^-.

(ii) Für $f \in \mathcal{L}^1$ gilt: $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1$ nach (i). Also

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \, d\mu \right| &= \left| \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right| \\ &\le \left| \int_X f^+ \, d\mu \right| + \left| \int_X f^- \, d\mu \right| \\ &= \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu \, . \end{aligned}$$

(iii) Die Behauptung folgt sofort aus (i) und (ii), wenn man beachtet, dass

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)\,, \quad \min(f,g) = \tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)\,.$$

(iv) Für eine μ-messbare Funktion f ist auch f^+ μ-messbar und es gilt:

$$0 \le \int_X f^+ \, d\mu \le \int_X g \, d\mu < \infty \,,$$

da $0 \le f^+ \le |f| \le g$. Also ist $f^+ \in \mathcal{L}^1$ und analog zeigt man $f^- \in \mathcal{L}^1$. Da $f = f^+ - f^-$ gilt, folgt $f \in \mathcal{L}^1$. Aus $f = f^+ - f^- \le f^+ \le |f| \le g$ und der Definition des Integrals folgt sofort

$$\int_X f \, d\mu \le \int_X |f| \, d\mu \le \int_X g \, d\mu \,. \qquad \square$$

Aussage (iv) des vorherigen Satzes kann wie folgt verschärft werden.

7.18 Folgerung. *Seien f, g μ-messbar und $\int_X f \, d\mu > -\infty$. Dann gilt*

$$f \le g \ \ \mu\text{-fast-überall} \quad \Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu.$$

Insbesondere ist $\int_X g \, d\mu$ definiert. Die entsprechende Aussage mit $\ge$ gilt, falls $\int_X f \, d\mu < \infty$.

Beweis: Im Fall $f, g \ge 0$ folgt die Behauptung direkt aus Definition 7.5. Für f, g beliebig haben wir

$$\big(\{g^- > f^-\} \cup \{f^+ > g^+\}\big) \subset \{f > g\}\,,$$

wobei alle Mengen aus $\mathcal{A}$ sind. Also folgt $g^- \le f^-$ und $f^+ \le g^+$ μ-fast-überall. Somit gilt

$$0 \le \int g^- \, d\mu \le \int f^- \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f^+ \, d\mu \le \int g^+ \, d\mu,$$

und die Behauptung folgt. $\square$

7.19 Beispiel. Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{-\alpha}$. Wir behaupten:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f \, d\lambda^n < \infty \Leftrightarrow \alpha > n, \quad \text{und} \quad \int_{B_1(0)} f \, d\lambda^n < \infty \Leftrightarrow \alpha < n.$$

Zum Beweis vergleichen wir f mit der Funktion

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \quad \text{mit } A_k = \{2^k \leq |x| < 2^{k+1}\}.$$

Es gelten die Abschätzungen

$$2^{-\alpha} g \leq f \leq g \;\text{ für } \alpha \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad 2^{-\alpha} g \geq f \geq g \;\text{ für } \alpha \leq 0.$$

Wegen der Monotonie des Integrals reicht es also aus, die Aussagen für g zu zeigen. Da $A_k = 2^k A_0$, folgt aus der Transformation von λ^n unter Streckungen (Satz 6.21),

$$\lambda^n(A_k) = (2^k)^n \, \lambda^n(A_0) = 2^{nk} \gamma_n \quad \text{mit } \gamma_n = \lambda^n(A_0) \in (0, \infty).$$

Da die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{l} 2^{-k\alpha} \chi_{A_k}$ punktweise auf $\mathbb{R}^n$ gegen $g \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}$ konvergiert, folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} g \, d\lambda^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \int 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \, d\lambda^n \\ &= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} \gamma_n \dfrac{1}{1 - 2^{n-\alpha}} & \text{falls } \alpha > n \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ganz entsprechend erhalten wir auf $B_1(0)$

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} g \, d\lambda^n &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \int 2^{-k\alpha} \chi_{A_k} \, d\lambda^n \\ &= \gamma_n \sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{(n-\alpha)k} = \begin{cases} \gamma_n \dfrac{1}{2^{n-\alpha} - 1} & \text{falls } \alpha < n \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung von Beispiel 7.19 gezeigt.

Mit dem Majorantenkriterium (Satz 7.17 (iv)) und Beispiel 7.19 folgt, dass allgemein Funktionen integrierbar sind, deren Wachstum durch eine geeignete Potenz $|x|^{-\alpha}$ kontrolliert ist. Genauer:

7.20 Beispiel. Ist f λ^n-messbar auf $\mathbb{R}^n$ und gilt für $C, \rho, R \in (0, \infty)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leq C \, |x|^{-\alpha} \text{ fast überall in } B_\varrho(0) \text{ mit } \alpha < n, \quad \text{bzw.} \\ &|f(x)| \leq C \, |x|^{-\alpha} \text{ fast überall in } \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \text{ mit } \alpha > n, \end{aligned}$$

so ist f auf $B_\varrho(0)$ bzw. auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ integrierbar.

2.8 Konvergenzsätze

Wir wollen nun untersuchen unter welchen Bedingungen der Grenzwert mit dem Integral vertauscht werden kann, d.h. wann gilt:

$$\int \lim_{k\to\infty} f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \,.$$

Die Konvergenzsätze von B. Levi und H. Lebesgue geben mit der monotonen Konvergenz bzw. der majorisierten Konvergenz hinreichende Bedingungen an, die wesentlich schwächer sind als die beim Riemannintegral benötigte gleichmäßige Konvergenz.

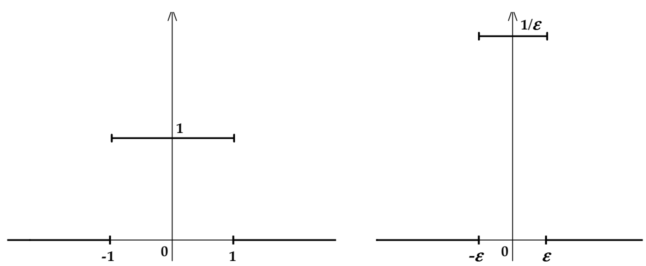
Die punktweise Konvergenz $f_k \to f$ reicht im allgemeinen nicht aus, um das Integral mit dem Grenzwert zu vertauschen.

8.1 Beispiel. Betrachte auf $\mathbb{R}$ die Indikatorfunktionen $f_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\,\chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} f_\varepsilon(x) = f_0(x) \text{ mit } f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Andererseits haben wir $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \, d\lambda^1 = \frac{1}{2\varepsilon}\,\lambda^1([-\varepsilon,\varepsilon]) = 1$ für alle $\varepsilon > 0$, das heißt

$$\int_{\mathbb{R}} f_0 \, d\lambda^1 = 0 < 1 = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \, d\lambda^1 \,.$$



Eine für die Vertauschung hinreichende, zusätzliche Bedingung liefert der Satz über monotone Konvergenz, der bereits im vorigen Kapitel in einem Spezialfall für den Nachweis der Linearität des Integrals benötigt wurde. Bevor wir ihn formulieren wollen wir noch μ-fast-überall Konvergenzen von Folgen μ-messbarer Funktionen klarstellen. Seien f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-messbare Funktionen auf X. Wir sagen, dass f_n *gegen* f *μ-fast-überall konvergiert* in Zeichen $f_n \to f$ *μ-fast-überall*, wenn es eine Menge $A \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(X \setminus A) = 0$ so, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt. Wir schreiben $f_n \nearrow f$ *μ-fast-überall*, falls zusätzlich $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $x \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man beachte, dass insbesondere A eine Teilmenge aller Definitionsbereiche der Funktionen f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, sein muss.

8.2 Satz (Levi, monotone Konvergenz). *Seien f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, μ-messbare Funktionen auf X mit $f_n \nearrow f$ μ-fast überall und sei $\int_X f_1 \, d\mu > -\infty$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \,.$$

Beweis: Der Satz wurde schon im Spezialfall $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen $f_n \geq 0$ und $f_n \nearrow f$ überall bewiesen (Satz 7.8). Der allgemeine Fall kann darauf zurückgeführt werden.

Aus $f_n \geq f_1$ fast überall und $f_1 \in \mathcal{L}^*$ folgt mit Folgerung 7.18 $f_n \in \mathcal{L}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\int_X f_n \, d\mu = \infty$ für $n \geq n_0$ ist die Behauptung klar. Sei also $f_n \in \mathcal{L}^1$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $f_1^- \in \mathcal{L}^1$ folgt mit Satz 7.17, dass $g_n := f_n + f_1^- \in \mathcal{L}^1$. Die Folge g_n besteht aus nichtnegativen integrierbaren Funktionen mit $g_n \nearrow f + f_1^-$ fast überall. Sei $A \in \mathcal{A}$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) + f_1^-(x)$ für alle $x \in A$ und $\mu(X \setminus A) = 0$ gilt. Bemerkung 7.6, Bemerkung 7.10, sowie Satz 7.8 angewendet mit $X = A$ liefert also

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \int_X (f + f_1^-) \, d\mu \,.$$

Da $f_n, g_n, f_1^- \in \mathcal{L}^1$ folgt daraus

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_X g_n \, d\mu - \int_X f_1^- \, d\mu \to \int_X (f + f_1^-) \, d\mu - \int_X f_1^- \, d\mu \quad n \to \infty \,.$$

Da $f^- \leq f_1^- \in \mathcal{L}^1$ und $f + f_1^- = f^+ + (f_1^- - f^-)$ liefert Lemma 7.11 und Satz 7.17

$$\begin{aligned}
\int_X (f - f_1^-) \, d\mu &= \int_X f^+ \, d\mu + \int_X (f_1^- - f^-) \, d\mu \\
&= \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu + \int_X f_1^- \, d\mu \\
&= \int_X f \, d\mu + \int_X f_1^- \, d\mu \,.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

8.3 Bemerkung. In Satz 8.2 kann man die Voraussetzung, dass f μ-messbar ist weglassen, falls μ vollständig ist (vgl. Satz 2.16). Alternativ kann man im Satz 8.2 voraussetzen, dass für die μ-messbaren Funktionen f_n gilt: $f_n \leq f_{n+1}$ μ-fast-überall. Sei $A \in \mathcal{A}$ derart, dass $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in A$ und $\mu(X \setminus A) = 0$ gilt. Daraus folgt, dass f auf A durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ wohldefiniert ist und f μ-messbar auf X ist (vgl. Satz 2.9). Somit gilt $f_n \nearrow f$ μ-fast-überall.

8.4 Folgerung. *Für nichtnegative μ-messbare Funktionen f_n gilt*

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

Beweis: Folgt sofort aus Satz 8.2, Bemerkung 8.3 und Lemma 7.11. □

Das folgende Lemma ist von unabhängigem Interesse, zum Beispiel in der Variationsrechnung. Es besagt unter anderem, dass das Integral bezüglich punktweiser Konvergenz nichtnegativer Funktionen unterhalbstetig ist.

8.5 Lemma (Lemma von Fatou). *Sei (f_k) eine Folge μ-messbarer Funktionen auf X und sei $g \in \mathcal{L}^1$. Falls $f_k \geq g$ μ-fast-überall für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt*

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu \, .$$

Beweis: Seien f_k auf $D_k \in \mathcal{A}$, mit $\mu(X \setminus D_k) = 0$, definiert. Wir setzen $D := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$ und definieren $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$. Für die Folge $g_k := \inf_{j\geq k} f_j$, definiert auf $\bigcap_{j=k}^{\infty} D_j$, gilt $g_{k+1} \geq g_k$ auf D und $\lim_{k\to\infty} g_k = f$ auf D. Da nach Voraussetzung $g_k \geq g \in \mathcal{L}^1$, $k \in \mathbb{N}$, folgt mit Satz 8.2 und $g_k \leq f_k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu \, . \qquad \square$$

8.6 Satz (Satz über majorisierte Konvergenz von Lebesgue). *Seien f, f_k μ-messbare Funktionen auf X mit $f_k \to f$, $k \in \mathbb{N}$, μ-fast-überall. Es gebe eine nichtnegative integrierbare Funktion $g \in \mathcal{L}^1$ mit $\sup_k |f_k| \leq g$ μ-fast-überall. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1$, und es gilt*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu \, .$$

Es gilt sogar $\|f - f_k\|_{L^1(\mu)} = \int_X |f - f_k| \, d\mu \to 0$ (vgl. Definition 9.7).

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt $|f| = \lim_{k\to\infty} |f_k| \leq g$ fast überall. Da $g \in \mathcal{L}^1$ folgt also $f, f_k \in \mathcal{L}^1$, $k \in \mathbb{N}$, nach Satz 7.17. Die Folge $2g - |f - f_k| \geq 0$ konvergiert punktweise fast überall gegen $2g$. Mit Lemma 8.5 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_X 2g \, d\mu &= \int_X \liminf_{k\to\infty} \big(2g - |f - f_k|\big) \, d\mu \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X \big(2g - |f - f_k|\big) \, d\mu \\
&= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_X |f - f_k| \, d\mu \, .
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \int_X f \, d\mu - \int_X f_k \, d\mu \right| \leq \limsup_{k\to\infty} \int_X |f - f_k| \, d\mu \leq 0 \, . \qquad \square$$

8.7 Bemerkung. In Satz 8.6 kann man die Voraussetzung, dass f μ-messbar ist weglassen, falls μ vollständig ist (vgl. Satz 2.16). Alternativ kann man im Satz 8.6 voraussetzen, dass die μ-messbaren Funktionen f_n μ-fast-überall konvergieren. Sei $A \in \mathcal{A}$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in A$ existiert und $\mu(X \setminus A) = 0$ gilt. Daraus folgt, dass f auf A durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ wohldefiniert ist und f μ-messbar auf X ist (vgl. Satz 2.9). Somit gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-fast-überall.

8.8 Folgerung. *Sei (h_n) eine Folge μ-messbarer Funktionen und sei $g \in \mathcal{L}^1$. Falls die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} h_j$ μ-fast-überall konvergiert und $\sup_n \left|\sum_{j=1}^{n} h_j\right| \le g$ μ-fast-überall, dann gilt auch*

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} h_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X h_j \, d\mu \, .$$

Beweis: Folgt sofort aus Satz 8.6 und Bemerkung 8.7. □

Als erste Anwendung wollen wir das eindimensionale Riemann-Integral mit dem Lebesgueintegral bzgl. des Maßes λ^1 vergleichen. Sei $I := [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Für eine durch Unterteilungspunkte $a = x_0 \le \ldots \le x_N = b$ gegebene Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ in Teilintervalle $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ werden Ober- und Untersumme wie folgt gebildet:

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{N} (\sup_{I_j} f)\,(x_j - x_{j-1}) \quad \text{bzw.} \quad \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{N} (\inf_{I_j} f)\,(x_j - x_{j-1}) \, .$$

Für zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ mit gemeinsamer Verfeinerung $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ sieht man leicht

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \le \underline{S}_{\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f) \, .$$

Die Funktion f heißt *Riemannintegrierbar* mit Integral $\int_a^b f(x)\,dx = S$, wenn gilt:

$$\sup_{\mathcal{Z}} \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \inf_{\mathcal{Z}} \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = S \, .$$

Aus der Vorlesung Analysis I sind hinreichende Kriterien für die Riemannintegrierbarkeit bekannt, zum Beispiel Stetigkeit auf $[a, b]$. Wir können jetzt die Riemannintegrierbaren Funktionen charakterisieren. Ein positiver Nebeneffekt ist, dass wir so die Integrationsformeln und -regeln aus Analysis I auch für das Lebesgueintegral zur Verfügung haben, jedenfalls wenn die Funktionen Riemannintegrierbar sind.

8.9 Satz (Riemannintegrierbarkeit). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$. Dann gilt:*

$$f \text{ Riemannintegrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^1\big(\{x \in I \,|\, f \text{ ist nicht stetig in } x\}\big) = 0 \, .$$

In diesem Fall ist f auch Lebesgueintegrierbar, und die Integrale stimmen überein.

Beweis: Für eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit Teilintervallen $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le N$, definieren wir die Riemannschen Treppenfunktionen

$$\overline{f}_{\mathcal{Z}}(x) := \max_{j \,|\, x \in I_j} \big(\sup_{I_j} f\big) \ge \limsup_{y \to x} f(y)\,,$$
$$\underline{f}_{\mathcal{Z}}(x) := \min_{j \,|\, x x \in I_j} \big(\inf_{I_j} f\big) \le \liminf_{y \to x} f(y)\,.$$

Sei $N_f(s) = \{x \in I \,\big|\, \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y \to x} f(y) \ge s\}$ für $s > 0$. Sind $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ beliebige Zerlegungen, so folgt $\overline{f}_{\mathcal{Z}_2}(x) - \underline{f}_{\mathcal{Z}_1}(x) \ge s$ für alle $x \in N_f(s)$, und hieraus mit Lemma 7.14

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) = \int_I \Big(\overline{f}_{\mathcal{Z}_2} - \underline{f}_{\mathcal{Z}_1}\Big)\, d\lambda^1 \ge s\,\lambda^1(N_f(s))\,.$$

Ist f Riemannintegrierbar, so bilden wir das Infimum über alle $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ und schließen $\lambda^1(N_f(s)) = 0$ für alle $s > 0$, womit die eine Richtung der Behauptung gezeigt ist.

Sei nun f λ^1-fast-überall stetig, und $\mathcal{Z}_i$ eine Folge von Zerlegungen mit Feinheit $\delta_i := \max_{1 \le j \le N_i} |x_{i,j} - x_{i,j-1}| \to 0$. Ist f stetig in x, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \overline{f}_{\mathcal{Z}_i}(x) &\le \sup_{|y-x| \le \delta_i} f(y) \searrow f(x) \\ \underline{f}_{\mathcal{Z}_i}(x) &\ge \inf_{|y-x| \le \delta_i} f(y) \nearrow f(x) \end{aligned}\right. \qquad \text{mit } i \to \infty\,.$$

Also konvergieren $\overline{f}_{\mathcal{Z}_i}$, $\underline{f}_{\mathcal{Z}_i}$ punktweise λ^1-fast-überall auf I gegen f, insbesondere ist f λ^1-messbar nach Satz 2.16. Wegen $|\overline{f}_{\mathcal{Z}_i}|$, $|\underline{f}_{\mathcal{Z}_i}| \le \sup_I |f| < \infty$ folgt aus Satz 8.6

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_i}(f) = \int_I \overline{f}_{\mathcal{Z}_i}\, d\lambda^1 \to \int_I f\, d\lambda^1 \quad \text{und} \quad \underline{S}_{\mathcal{Z}_i}(f) = \int_I \underline{f}_{\mathcal{Z}_i}\, d\lambda^1 \to \int_I f\, d\lambda^1\,.$$

Also ist f Riemannintegrierbar mit Riemann-Integral $\int_a^b f(x)\, dx = \int_I f\, d\lambda^1$. $\square$

Ein uneigentliches Integral einer Funktion f kann dann und nur dann als Lebesgueintegral aufgefasst werden, wenn es absolut konvergiert, d.h. das uneigentliche Integral von $|f|$ existiert. Dies zeigt man leicht mit Definition 7.12, Satz 8.9 und einem Konvergenzsatz. Zum Beispiel ist das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ nicht als Lebesgueintegral definiert.

Wir kommen nun zu einer weiteren Anwendung der Konvergenzsätze, nämlich der Frage der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Integralen, deren Integrand von einem Parameter abhängt.

8.10 Lemma (Stetigkeit von Parameterintegralen). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und erfülle $f : U \times X \to \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen:*

(i) *es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$ so, dass für alle Punkte $x \in X \setminus N$ die Funktion $f(\cdot, x)$ stetig in U ist;*

(ii) *für alle $t \in U$ ist die Funktion $f(t, \cdot)$ μ-messbar;*

(iii) *es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ so, dass für alle $t \in U$ und für μ-fast-alle $x \in X$ gilt*

$$|f(t,x)| \leq g(x)\,.$$

Dann ist die Funktion

$$\varphi : U \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$$

stetig auf U.

Beweis: Für eine Folge $(t_k) \subset U$ mit $t_k \to t$ konvergieren die Funktionen $f_k := f(t_k, \cdot)$ nach Voraussetzung μ-fast-überall gegen $f(t, \cdot)$, und es gilt $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| \leq g(x)$ mit $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Also folgt aus Satz 8.6

$$\varphi(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_X f(t_k, x)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t_k)\,. \qquad \square$$

8.11 Satz (Differentiation unter dem Integralzeichen). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und erfülle $f : U \times X \to \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen:*

(i) *es existiert eine Nullmenge $N \subseteq X$ so, dass für alle Punkte $x \in X \setminus N$ die Funktion $f(\cdot, x)$ stetig differenzierbar in U ist;*

(ii) *für alle $t \in U$ ist die Funktion $f(t, \cdot)$ μ-messbar;*

(iii) *es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ so, dass für alle $t \in U$ und für μ-fast-alle $x \in X$ und $i = 1, \ldots, n$*

$$|\partial_i f(t,x)| \leq g(x)\,.$$

Dann ist die Funktion $\varphi(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ auf U stetig differenzierbar und es gilt für alle $t \in U$ und $i = 1, \ldots, n$

$$\partial_i \varphi(t) = \int_X \partial_i f(t,x)\, d\mu(x)\,.$$

Beweis: Für $t \in U$ und $h \neq 0$ hinreichend klein gilt

$$\frac{\varphi(t + he_i) - \varphi(t)}{h} = \int_X \frac{f(t + he_i, x) - f(t,x)}{h}\, d\mu(x)\,.$$

Nach Voraussetzung gilt für μ-fast-alle $x \in X$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t + he_i, x) - f(t,x)}{h} = \partial_i f(t,x)\,.$$

Ferner gilt für μ-fast-alle $x \in X$ die Abschätzung

$$\left|\frac{f(t+he_i,x)-f(t,x)}{h}\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_0^h \partial_i f(t+se_i,x)\,ds\right| \le g(x)\,.$$

Durch Grenzübergang $h \to 0$ erhalten wir mit Satz 8.6 die Existenz von $\partial_i\varphi(t)$ und die Darstellung durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Die Stetigkeit der Ableitung ergibt sich dann aus Lemma 8.10. $\square$

2.9 L^p-Räume

Wir führen nun die L^p-Räume ein und zeigen, dass sie Banachräume sind. Dies ist die wohl wichtigste Konsequenz der Konvergenzsätze.

9.1 Definition. *Sei $1 \le p < \infty$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ die Menge aller μ-messbaren Funktionen f mit*

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty\,.$$

Die Größe

$$\|f\|_p = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{9.2}$$

heißt L^p-Norm *der Funktion $f \in \mathcal{L}^p$. Mit $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ bezeichnen wir die Menge aller μ-messbaren Funktionen f für die eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ existiert mit*

$$|f| \le K \qquad \text{fast überall.}$$

Die Größe

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| := \inf\left\{s>0 \,\middle|\, \mu(\{|f|>s\})=0\right\} \tag{9.3}$$

heißt L^∞-Norm *der Funktion $f \in \mathcal{L}^\infty$.*

Wir erinnern daran, dass $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein gegebener Maßraum ist, auf dessen explizite Angabe wir oft verzichten werden. Wenn es sinnvoll ist, den Raum X oder das Maß μ zu betonen schreiben wir $\mathcal{L}^p(X)$ oder $\mathcal{L}^p(\mu)$. Im Folgenden werden wir zeigen, dass es gerechtfertigt ist, die in (9.2), (9.3) definierten Größen Normen zu nennen.

9.4 Lemma (Young–Ungleichung). *Sei $p,q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Für nichtnegative Zahlen $a,b \ge 0$ gilt:*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Beweis: Sei $ab > 0$. Die Konkavität der Logarithmusfunktionen $\ln(t)$ liefert

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q = \ln a + \ln b = \ln(ab)\,.$$

Da der Logarithmus $\ln(t)$ monoton wachsend ist folgt die Behauptung. □

9.5 Lemma (Hölder–Ungleichung). *Sei $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ mit $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*[1] *Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1$ und es gilt:*

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q\;.$$

Beweis: Der Fall $p = 1$ ist klar. Sei also $p \in (1, \infty)$. Sei $s = \|f\|_p\,, t = \|g\|_q$. Wir können annehmen, dass $st > 0$. Aus Lemma 9.4 mit $a = |f(x)|/s,\ b = |g(x)|/t$ folgt für fast alle $x \in X$

$$\frac{f(x)g(x)}{st} \leq \frac{|f(x)|\,|g(x)|}{st} \leq \frac{|f(x)|^p}{ps^p} + \frac{|g(x)|^q}{qt^q}\,.$$

Also gilt:

$$\left|\frac{1}{st}\int_X fg\,d\mu\right| \leq \frac{1}{ps^p}\int_X |f|^p\,d\mu + \frac{1}{qt^q}\int_X |g|^q\,d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|_p$ fast die Eigenschaften einer Norm hat.

9.6 Satz. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $\|f\|_{L^p} = 0 \quad\Rightarrow\quad f = 0$ *μ-fast-überall.*
(ii) $f \in \mathcal{L}^p,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lambda f \in \mathcal{L}^p$ *und* $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$.
(iii) $f, g \in \mathcal{L}^p \quad\Rightarrow\quad f + g \in \mathcal{L}^p$ *und* $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Beweis: Sei zunächst $1 \leq p < \infty$. Folgerung 7.15 impliziert Aussage (i). Weiter folgt Behauptung (ii) aus der Linearität des Integrals (vgl. Satz 7.17). Die Aussage (iii) für $p = 1$ folgt aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$. Sei also $p \in (1, \infty)$. Da die Funktion $t \mapsto t^p$ auf $[0, \infty)$ konvex ist, gilt nun

$$|f + g|^p = 2^p\left|\frac{f + g}{2}\right|^p \leq 2^{p-1}\left(|f|^p + |g|^p\right).$$

Insbesondere ist mit $f, g \in \mathcal{L}^p$ auch $f + g \in \mathcal{L}^p$. Aus Lemma 9.5 folgt mit $q = \frac{p}{p-1}$ (man beachte, dass $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$)

---

[1] Wir benutzen die Konvention, dass $p = 1, q = \infty$ in der Identität $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ enthalten ist.

$$\int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\;d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\;d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\;d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \|f\|_p \,\|f+g\|_p^{p-1}$$

und analog

$$\int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\;d\mu \leq \|g\|_p \,\|f+g\|_p^{p-1}\,.$$

Somit erhalten wir

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g|^p\;d\mu \leq \int_X |f|\,|f+g|^{p-1}\;d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1}\;d\mu$$
$$\leq \big(\,\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p-1}\,,$$

welches die Behauptung (iii) ist.

Im Fall $p=\infty$ ist die Aussage (i) leicht zu sehen. Um (iii) zu zeigen, sei $|f| \leq s$ fast überall und $|g| \leq t$ fast überall. Dann ist $|f+g| \leq s+t$ fast überall, woraus sofort die Behauptung folgt. Um (ii) zu beweisen nehmen wir ohne Einschränkung $\lambda \neq 0$ an. Es gilt dann

$$\mu(\{|\lambda f(x)| > |\lambda|\,\|f\|_{L^\infty}\}) = \mu(\{|f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\}) = 0\,,$$

also $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\,\|f\|_\infty$. Die Gleichheit in (ii) ergibt sich nun durch Anwendung auf λf und $\frac{1}{\lambda}$, statt f bzw. λ. □

Die Ungleichung in (iii) wird *Minkowski–Ungleichung* genannt.

Aus der Definition 9.1 und Satz 9.6 folgt, dass die Funktion $f \mapsto \|f\|_p$ definiert auf $\mathcal{L}^p, p \in [1,\infty]$ nicht-negativ und positiv homogen ist, sowie die Dreiecksungleichung erfüllt. Da es aber nichttriviale Funktionen $g \neq 0$ gibt mit $\|g\|_p = 0$ ist $\|\cdot\|_p$ keine Norm. Um dieses Problem zu lösen geht man zu *Restklassen* über, d.h. man betrachtet

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^p \,\big|\, g = f \;\; \mu\text{-fast-überall}\}$$

und definiert den *Restklassenraum*

$$L^p = L^p(X,\mathcal{A},\mu) := \big\{[f] \,\big|\, f \in \mathcal{L}^p\big\}\,.$$

Auf L^p definiert man die Operationen

$$[f]+[g] := [f+g]\,,\quad \alpha[f] := [\alpha f]$$

und die Norm

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p\,.$$

Diese Operationen hängen offensichtlich nicht vom Repräsentanten ab. Aus Lemma 7.13 folgt, dass die Norm wohldefiniert ist.

9.7 Definition. *Sei $1 \le p \le \infty$. Der lineare Raum $L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ besteht aus den Restklassen $[f]$ von μ-messbaren Funktionen f mit $\|[f]\|_p < \infty$. Er wird mit der Norm $\|[\,\cdot\,]\|_p$ versehen.*

Es ist üblich nicht zwischen $[f]$ und f sowie zwischen $\mathcal{L}^p$ und L^p zu unterscheiden. Demzufolge bezeichnet man die Restklassen $[f]$ oft als Funktionen. Wenn es sinnvoll ist, den Raum X oder das Maß μ zu betonen schreiben wir $L^p(X)$ oder $L^p(\mu)$. Man kann den L^p-Raum auch auf beliebigen Mengen E aus $\mathcal{A}$ definieren.

9.8 Definition. *Für $E \in \mathcal{A}$ und $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $f_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ die Fortsetzung mit $f_0(x) = 0$ für alle $x \in X \setminus E$. Wir setzen dann*

$$\mathcal{L}^p(E) = \mathcal{L}^p(E, \mu) := \big\{ f : E \to \overline{\mathbb{R}} \,\big|\, f_0 \in \mathcal{L}^p(X) \big\}\,,$$

und $L^p(E, \mu) := \{[f] \,|\, f \in \mathcal{L}^p(E, \mu)\}$. Durch $\|[f]\|_{L^p(E)} := \|[f_0]\|_{L^p(X)}$ wird eine Norm auf $L^p(E, \mu)$ definiert.

Auch hier unterscheiden wir nicht zwischen den Restklassen und den Funktionen.

Das folgende Lemma stellt den wesentlichen Schritt im Beweis der Vollständigkeit von L^p dar.

9.9 Lemma. *Sei $1 \le p < \infty$ und $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ mit $u_j \in L^p$. Falls $\sum_{j=1}^\infty \|u_j\|_{L^p} < \infty$, so gelten folgende Aussagen:*

(1) *$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existiert für μ-fast-alle $x \in X$.*

(2) *$f \in L^p$.*

(3) *$\|f - f_k\|_p \to 0$.*

Beweis: Wir definieren auf $D \in \mathcal{A}$, dem Durchschnitt aller Definitionsbereiche der Funktionen u_j, $j \in \mathbb{N}$, die Funktionen

$$g_k = \sum_{j=1}^k |u_j|\,, \quad g = \sum_{j=1}^\infty |u_j|\,.$$

Es gilt $g_k \le g_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $g_k(x) \nearrow g(x)$ für alle $x \in D$ mit $k \to \infty$. Ausserdem sind g, g_k, $k \in \mathbb{N}$, μ-messbar nach Bemerkung 8.3. Aus dem Satz über monotone Konvergenz, Satz 8.2, und der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\|g\|_p = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p \le \sum_{j=1}^\infty \|u_j\|_p < \infty\,.$$

Wegen Folgerung 7.15 ist $g(x) < \infty$ für fast alle x. Für diese x ist $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also existiert $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Ferner ist nach Bemerkung 8.3 f μ-messbar und es gilt

$$|f_k|^p \le g^p \in L^1 \quad \text{sowie} \quad |f - f_k|^p \le 2^{p-1}\big(|f|^p + |f_k|^p\big) \le 2^p\, g^p\,.$$

Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, Satz 8.6, folgt $f \in L^p$ und $\|f - f_k\|_p \to 0$. □

9.10 Satz (Riesz & Fischer). *Für* $1 \leq p \leq \infty$ *ist* $(L^p, \|\cdot\|_p)$ *vollständig, also ein Banachraum.*

Beweis: Sei $(f_k) \subset L^p$ eine gegebene Cauchyfolge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$. Es reicht aus, eine Teilfolge anzugeben, die in L^p konvergiert. Wir betrachten zuerst den Fall $1 \leq p < \infty$, und können nach evtl. Wahl einer Teilfolge annehmen:

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq 2^{-k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Mit $f_0 := 0$ gilt $f_k = \sum_{j=1}^k u_j$ für $u_j = f_j - f_{j-1}$. Die Voraussetzungen von Lemma 9.9 sind erfüllt, also konvergiert f_k in L^p sowie punktweise fast überall gegen eine Funktion $f \in L^p$. Dies beweist den Satz für $1 \leq p < \infty$. Sei nun $p = \infty$. Wegen $\big|\,\|f_k\|_{L^\infty} - \|f_l\|_\infty\big| \leq \|f_k - f_l\|_\infty$ existiert $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty$. Die Mengen

$$\begin{aligned} N_k &= \{x \,\big|\, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \\ N_{k,l} &= \{x \,\big|\, |f_k(x) - f_l(x)| > \|f_k - f_l\|_\infty\} \end{aligned}$$

sind Nullmengen. Also ist $N := \bigcup_{k=1}^\infty N_k \cup \bigcup_{k,l=1}^\infty N_{k,l}$ ebenfalls eine Nullmenge. Für $x \in X \setminus N$ gilt nun

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{für } k, l \geq k(\varepsilon)\,,$$

insbesondere ist $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ definiert. Für $x \in X \setminus N$ haben wir

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \lim_{k\to\infty} |f_k(x)| \leq \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty\,, \\ |f_k(x) - f(x)| &= \lim_{l\to\infty} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{für } k \geq k(\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Dies bedeutet $\|f\|_\infty \leq \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_\infty < \infty$ und $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ mit $k \to \infty$. □

Im Beweis haben wir auch folgende Aussage bewiesen, die oft benutzt wird.

9.11 Folgerung. *Gilt* $f_k \to f$ *in* L^p, $1 \leq p \leq \infty$, *so konvergiert eine Teilfolge* (f_{k_j}) *punktweise* μ*-fast-überall gegen* f.

Auf die Wahl der Teilfolge in Folgerung 9.11 kann für $p < \infty$ im Allgemeinen nicht verzichtet werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

9.12 Beispiel. Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine eindeutige Darstellung $n = 2^k + j$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j < 2^k$. Betrachte die so gegebene Folge

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j\,2^{-k} \leq x \leq (j+1)2^{-k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda^1 = 2^{-k} < \frac{2}{n} \to 0$ mit $n \to \infty$. Andererseits gilt für gegebene $x \in [0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$, wenn wir $j := [2^k x]$ (Gaußklammer) und $n = 2^k + j$ wählen,

$$j\, 2^{-k} \le x < (j+1)2^{-k} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) = 1.$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ für alle $x \in [0,1)$, d.h. die Folge f_n konvergiert nicht punktweise λ^1-fast-überall gegen Null.

Wir wollen nun einen weiteren wichtigen Konvergenzsatz beweisen.

9.13 Satz (Konvergenzsatz von Vitali). *Sei $1 \le p < \infty$. Die Folge $(f_n) \subset L^p$ konvergiere punktweise μ-fast-überall gegen die μ-messbare Funktion f. Dann sind folgende Aussagen (i) und (ii) äquivalent:*

(i) $f \in L^p$ *und* $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(ii) *Mit* $\lambda(A) := \limsup_{n\to\infty} \int_A |f_n|^p \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, *gilt:*

  (1) *Zu* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *mit* $\lambda(A) < \varepsilon$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(A) < \delta$.

  (2) *Zu* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $E \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(E) < \infty$ *und* $\lambda(X \setminus E) < \varepsilon$.

Eine Folge mit (1) und (2) heißt gleichgradig integrierbar.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Es gelte $f_n \to f$ in L^p. Die Minkowski-Ungleichung ergibt dann für jedes $A \in \mathcal{A}$

$$\big| \|f_n\|_{L^p(A)} - \|f\|_{L^p(A)} \big| \le \|f_n - f\|_{L^p(A)} \le \|f_n - f\|_{L^p(X)} \to 0\,,$$

also folgt $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p(A)} = \|f\|_{L^p(A)}$ und somit

$$\lambda(A) = \int_A |f|^p \, d\mu\,.$$

Eigenschaft (1) gilt nach Bemerkung 11.2. Mit $E_\delta := \{|f|^p \ge \delta\} \in \mathcal{A}$ gilt nach Lemma 7.14

$$\mu(E_\delta) \le \frac{1}{\delta} \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\,.$$

Für $\delta \searrow 0$ konvergiert $\chi_{X\setminus E_\delta} |f|^p$ punktweise gegen Null mit Majorante $|f|^p$, also folgt für $\delta > 0$ hinreichend klein

$$\lambda(X \setminus E_\delta) = \int_{X\setminus E_\delta} |f|^p \, d\mu < \varepsilon\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien jetzt umgekehrt (1) und (2) vorausgesetzt. Zu $\varepsilon > 0$ sei $E \in \mathcal{A}$ wie in (2) und $\delta > 0$ wie in (1) gewählt. Da $\mu(E) < \infty$, gibt es nach dem Satz von Egorov (Satz 2.17) ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset E$ und $\mu(E \setminus A) < \delta$, so dass $f_n \rightrightarrows f$ auf A. Nun gilt

$$|f_n - f|^p \le \chi_A |f - f_n|^p + 2^{p-1}(\chi_{D\setminus E} + \chi_{E\setminus A})\big(|f|^p + |f_n|^p\big)\,,$$

wobei $D \in \mathcal{A}$, mit $\mu(X \setminus D) = 0$, der Durchschnitt der Definitionsbereiche von f, f_k, $k \in \mathbb{N}$, ist. Ferner folgt aus dem Lemma von Fatou (Lemma 8.5) für alle $B \in \mathcal{A}$

$$\int_B |f|^p \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_B |f_n|^p \, d\mu \leq \lambda(B)\,.$$

Also erhalten wir mit $n \to \infty$ wegen (2) und (1)

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p \leq 2\big(\lambda(X \setminus E) + \lambda(E \setminus A)\big)^{\frac{1}{p}} < 2^{1+\frac{1}{p}} \varepsilon^{\frac{1}{p}}\,. \qquad \square$$

Bedingung (1) schließt eine Konzentration des Integrals wie in Beispiel 8.1 aus, und Bedingung (2) verhindert zum Beispiel eine Konzentration im „Unendlichen“ wie im Beispiel

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n = \chi_{[n,n+1]}\,.$$

Man beachte, dass für endliche Maße Bedingung (2) aus Bedingung (1) folgt.

Wir wollen nun zeigen, dass man im Falle des n-dimensionalen Lebesguemaßes beliebige L^p-Funktionen durch stetige Funktionen approximiert werden können. Im Gegensatz zu allgemeinen Maßräumen haben wir auf $\mathbb{R}^n$ eine Metrik gegeben.

9.14 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Der* Träger *einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist die Menge*

$$\operatorname{spt} f := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω *wird mit $C_0^0(\Omega)$ bezeichnet.*

Für $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist $\operatorname{dist}(\cdot, K) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ die *Abstandsfunktion von* K, die durch $\operatorname{dist}(x, K) := \inf_{z \in K} |x - z|$ definiert ist. Wir brauchen die folgenden beiden Tatsachen:

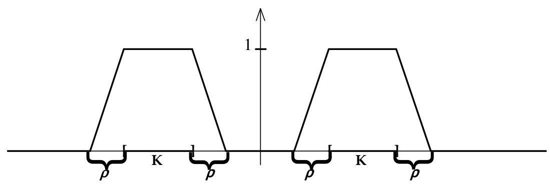
$$\operatorname{dist}(\cdot, K) \text{ ist Lipschitzstetig mit Konstante Eins.} \tag{9.15}$$

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, K) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} \operatorname{dist}(x, K) > 0\,. \tag{9.16}$$

9.17 Satz (Dichtheit von $C_0^0(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $1 \le p < \infty$. Dann gibt es zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $(f_k) \subset C_0^0(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_p \to 0$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage zuerst für $f = \chi_E$, wobei $E \subset \Omega$ eine λ^n-messbare Menge ist mit $\lambda^n(E) < \infty$. Nach Satz 6.8 existiert $K \subset E$ kompakt mit $\lambda^n(E \setminus K) < \varepsilon/2$. Setze

$$f_\varrho : \Omega \to [0,1] : x \mapsto \left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, K)}{\varrho}\right)^+ .$$



Nach (9.15), (9.16) ist $f_\varrho \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{spt} f_\varrho = \{x \mid \operatorname{dist}(x, K) \le \varrho\}$ eine kompakte Teilmenge von Ω für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Da $f_\varrho = f$ auf K und $|f_\varrho - f| \le 1$, folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_\varrho - f|^p \, d\lambda^n &\le \int_\Omega |f_\varrho - f| \, d\lambda^n \\ &\le \int_{\Omega\setminus K} (|f_\varrho| + |f|) \, d\lambda^n \\ &\le \lambda^n(\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \operatorname{dist}(x, K) \le \varrho\}) + \lambda^n(E \setminus K) \\ &< \varepsilon \quad \text{für } \varrho > 0 \text{ hinreichend klein.}\end{aligned}$$

Sei nun $f \in L^p(\Omega)$ beliebig. Wir können $f \ge 0$ annehmen, sonst betrachte f^+ und f^-. Nach Satz 7.2 gibt es eine Folge $f_1 \le f_2 \le \ldots$ von nichtnegativen λ^n-Treppenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$; dabei bezeichnet f_0 die Fortsetzung von f mit $f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Es folgt $f_k \to f_0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 8.6. Da jede Treppenfunktion endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist, ist der Satz bewiesen. □

2.10 Produktmaße und der Satz von Fubini

Wir wollen nun für gegebene Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ ein Produktmaß τ definieren, dass auf messbaren Quadern $M = A \times C \subset X \times Y$, $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$, durch

$$\tau(M) = \mu(A)\,\nu(C)$$

gegeben ist. Der Satz von Fubini besagt dann, dass man Integrale in Produkträumen auf die Integrationen in den Faktoren zurückführen kann und man die Integrationsreihenfolge vertauschen kann.

Wir erinnern an die Defintion von Schnitten im Produktraum $X \times Y$. Für $E \subset X \times Y$, und $x \in X, y \in Y$ sind

$$\begin{aligned} E^x &:= \{ y \in Y \mid (x, y) \in E \}, \\ E^y &:= \{ x \in X \mid (x, y) \in E \} \end{aligned}$$

die *x- bzw. y-Schnitte von E*. Die Definition des Produktmaßes beruht auf folgendem Satz.

10.1 Satz. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und sei $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$. Dann sind die Funktionen $x \mapsto \nu(M^x)$ und $y \mapsto \mu(M^y)$ $\mathcal{A}$-messbar bzw. $\mathcal{C}$-messbar. Ferner gilt*

$$\int_X \nu(M^x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(M^y)\, d\nu(y)\,. \tag{10.2}$$

Beweis: Sei $\mathcal{S}$ das System aller Mengen $M \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$ für die die Aussagen des Satzes gelten. Sei $\mathcal{Q}$ das System der messbaren Quader (vgl. Definition 5.36), d.h. Mengen der Form $A \times C \subset X \times Y$ mit $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$. Ferner sei $\mathcal{F}$ der durch $\mathcal{Q}$ erzeugte Ring. Da $X \times Y \in \mathcal{Q}$ ist $\mathcal{F}$ eine Algebra. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{S}$ eine monotone Klasse ist, die die Algebra $\mathcal{F}$ enthält. Aus Satz 5.38, Folgerung 5.9 und Satz 5.28 folgt somit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C} = \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F}) = \mathcal{S}$.

(i) Sei $M = A \times C \in \mathcal{Q}$ mit $A \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{C}$, dann erhalten wir für die Schnitte: $M^x = C$ falls $x \in A$ und $M^x = \emptyset$ falls $x \notin A$, sowie $M^y = A$ falls $y \in C$ und $M^y = \emptyset$ falls $y \notin C$. Somit ergibt sich $\nu(M^x) = \nu(C)\chi_A(x)$ ist $\mathcal{A}$-messbar, und $\mu(M^y) = \mu(A)\chi_C(y)$ ist $\mathcal{C}$-messbar. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \int_X \nu(M^x)\, d\mu(x) &= \int_X \nu(C)\, \chi_A(x)\, d\mu(x) \\ &= \nu(C)\, \mu(A) \\ &= \int_Y \mu(A)\, \chi_C(y)\, d\nu(y) = \int_Y \nu(M^y)\, d\nu(y)\,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Also ist $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$.

(ii) Da σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ auch Halbringe sind, ist nach Satz 5.5 auch $\mathcal{Q}$ ein Halbring. Nach Lemma 5.10 reicht es also disjunkte Vereinigungen von Quadern zu betrachten, um $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ zu zeigen. Sei also $M = \bigcup_{i=1}^n M_i \in \mathcal{F}$, wobei $M_i = A_i \times C_i \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt sind. Aus der Definition der Schnitte folgt sofort $M^x = \bigcup_{i=1}^n M_i^x \in \mathcal{C}$ und $M^y = \bigcup_{i=1}^n M_i^y \in \mathcal{A}$, wobei die Vereinigungen wiederum paarweise disjunkt sind. Da μ und ν Maße sind folgt sofort $\nu(M^x) = \sum_{i=1}^n \nu(C_i)\chi_{A_i}(x)$ ist $\mathcal{A}$-messbar, und $\mu(M^y) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i)\chi_{C_i}(y)$ ist $\mathcal{C}$-messbar. Die Eigenschaft (10.2) folgt aus der Linearität des Integrals und (10.3). Somit ist die Algebra $\mathcal{F}$ in $\mathcal{S}$ enthalten.

(iii) Seien nun $M_1 \subset \ldots M_n \subset M_{n+1} \ldots$ Mengen aus $\mathcal{S}$. Somit sind die Funktionen $f_n(x) := \nu(M_n^x)$ $\mathcal{A}$-messbar, nicht-negativ und monoton wachsend, und $g_n(y) := \mu(M_n^y)$ $\mathcal{C}$-messbar, nicht-negativ und monoton wachsend. Aus Satz 1.17 und den Eigenschaften von Schnitten folgt sofort, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty M_n^x\big) = \nu\big((\bigcup_{n=1}^\infty M_n)^x\big)$ $\mathcal{A}$-messbar ist. Analog folgt, dass $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty M_n^y\big) = \mu\big((\bigcup_{n=1}^\infty M_n)^y\big)$ $\mathcal{C}$-messbar ist. Der Satz von Levi (Satz 8.2) angewendet auf die Folgen (f_n) bzw. (g_n) und $(M_n) \subset \mathcal{S}$ liefert $\bigcup_{n=1}^\infty M_n \in \mathcal{S}$.

(iv) Seien nun $M_1 \supset \ldots M_n \supset M_{n+1} \ldots$ Mengen aus $\mathcal{S}$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass es Mengen $X_0 \in \mathcal{A}$, $Y_0 \in \mathcal{C}$ mit $\mu(X_0) < \infty$, $\nu(Y_0) < \infty$ und $M_1 \subset X_0 \times Y_0$ gibt. In Analogie zum Beweis von Satz 1.17 (ii) definieren wir $f_n(x) := \nu(Y_0) - \nu(M_n^x)$ und $g_n(y) := \mu(X_0) - \mu(M_n^y)$. Offenbar sind (f_n), (g_n) $\mathcal{A}$-messbar bzw. $\mathcal{C}$-messbar, nicht-negativ und monoton wachsend. Hierbei wurde benutzt, dass $\nu(Y_0)$ und $\mu(X_0)$ endlich sind. Mithilfe von (iii) und den de Morganschen Regeln zeigt leicht man, dass $\bigcap_{n=1}^\infty M_n \in \mathcal{S}$. Da μ und ν σ-endlich sind, gibt es aufsteigende Folgen $(X_k) \subset \mathcal{A}$, $(Y_k) \subset \mathcal{C}$ mit $\mu(X_k) < \infty$, $\nu(Y_k) < \infty$. Wir setzen $D_n^k := M_n \cap (X_k \times Y_k)$. Für beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N}$ folgt aus dem gerade Gezeigten $D^k := \bigcap_{n=1}^\infty D_n^k \in \mathcal{S}$. Die Folge $(D^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend und somit folgt aus (iii), dass $\bigcup_{k=1}^\infty D^k \in \mathcal{S}$. Aber $D^k = \big(\bigcap_{n=1}^\infty M_n\big) \cap (X_k \times Y_k)$ und also ist $\bigcap_{n=1}^\infty M_n = \bigcup_{k=1}^\infty D^k \in \mathcal{S}$.

Aus (iii) und (iv) folgt, dass $\mathcal{S}$ eine monotone Klasse ist. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass auf die Bedingung der σ-Endlichkeit der Maße im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

10.4 Beispiel. Für $D = \{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \,|\, x = y\} \subset \mathbb{R} \times [0,1]$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{card}(D_x)\, d\lambda^1(x) = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} \lambda^1(D_y)\, d\operatorname{card}(y)\,.$$

Mit $I_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ gilt $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=1}^{n} I_k \times I_k)$, also ist $D \in \mathcal{M}(\lambda^1) \otimes \mathcal{M}(\operatorname{card})$.

Wir können nun die Existenz des Produktmaßes zeigen.

10.5 Satz. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß τ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ so, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \mathcal{C}$*

$$\tau(A \times C) = \mu(A)\, \nu(C)\,.$$

Das Maß τ heißt Produktmaß von μ und ν *und wird mit $\mu \otimes \nu$ bezeichnet.*

Beweis: Um die Eindeutigkeit zu zeigen betrachten wir zwei Maße τ_1 und τ_2, die die Behauptungen des Satzes erfüllen. Wir definieren das System $\mathcal{S} := \{M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \,|\, \tau_1(M) = \tau_2(M)\}$. Offenbar enthält $\mathcal{S}$ die messbaren Quader $\mathcal{Q}$ und ist abgeschlossen unter endlichen disjunkten Vereinigungen, da τ_1 und τ_2 Maße sind. Somit enthält $\mathcal{S}$ auch den durch $\mathcal{Q}$ generierten Ring $\mathcal{F}$, der eine Algebra ist, da $X \times Y \in \mathcal{Q}$. Weiterhin folgt aus Satz 1.17, dass $\mathcal{S}$ eine monotone Klasse ist (im Falle von monoton fallenden Folgen (M_n) mit unendlichen Maß argumentiert man wie im Beweis von Satz 10.1 unter Benutzung der σ-Endlichkeit der Maße). Aus Satz 5.38, Folgerung 5.9 und Satz 5.28 folgt somit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C} = \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, d.h. $\tau_1 = \tau_2$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$.

Um die Existenz eines Produktmaßes zu zeigen definieren wir

$$\tau(M) := \int_X \nu(M^x)\, d\mu(x)\,. \tag{10.6}$$

falls $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$. Aus Satz 10.1 folgt $\tau(M) := \int_Y \mu(M^y)\, d\nu(y)$. Weiterhin haben wir in (10.3) gezeigt, dass τ ein Produktmaß ist, d.h. $\tau(A \times C) = \mu(A)\, \nu(C)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $C \in \mathcal{C}$. Es bleibt zu zeigen, dass τ ein Maß ist. Offenbar ist $\tau(\emptyset) = 0$. Für paarweise disjunkte Mengen M_i, $i \in \mathbb{N}$, gilt auf Grund der Eigenschaften der Schnitte, des Maßes ν und der Folgerung 8.4 des Satzes von Levi

$$\begin{aligned}
\tau\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) &= \int_X \nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i^x\Big)\, d\mu(x) \\
&= \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \nu(M_i^x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \nu(M_i^x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \tau(M_i)\,.
\end{aligned}$$

□

10.7 Folgerung (Cavalierisches Prinzip). *Seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ*-endliche Maßräume. Dann gilt für alle* $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\mu \otimes \nu(A) &= \int_X \nu(A^x)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \chi_A(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \mu(A^y)\, d\nu(y) = \int_Y \left(\int_X \chi_A(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition des Produktmaßes (10.6) und Satz 10.1. □

10.8 Folgerung. *Seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ*-endliche Maßräume. Dann sind für alle* $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ *folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mu \otimes \nu(A) = 0$.

(ii) $\mu(A^y) = 0$ *für* ν*-fast alle* $y \in Y$.

(iii) $\nu(A^x) = 0$ *für* μ*-fast alle* $x \in X$.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition des Produktmaßes (10.6), der Identität (10.2) und Folgerung 7.15 (ii). □

Um den Satz von Fubini zu beweisen, benötigen wir folgendes Resultat:

10.9 Lemma. *Seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ*-endliche Maßräume und sei* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *eine* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$*-messbare Funktion. Dann ist die Funktion* $f(x, \cdot)$ $\mathcal{C}$*-messbar für alle* $x \in X$.

Beweis: Für jedes feste aber beliebige $s \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ gilt:

$$\{y \in Y \mid f(x,y) > s\} = \{(t,y) \in X \times Y \mid f(t,y) > s\}^x\,,$$

woraus die Behauptung folgt, da die rechte Menge der x-Schnitt einer Menge aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ ist und somit nach Folgerung 5.31 in $\mathcal{C}$ liegt. □

10.10 Satz (Fubini). *Seien* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ σ*-endliche Maßräume und sei* $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f\, d\mu \otimes \nu &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

Beweis: (i) Wir beweisen die Behauptung zuerst für nichtnegative $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$-messbare Funktionen $f \geq 0$. Die Behauptung gilt für Indikatorfunktionen χ_A, mit $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, auf Grund von Folgerung 10.7 und $\mu \otimes \nu(A) = \int_{X \times Y} \chi_A\, d\mu \otimes \nu$. Somit gilt die Aussage auch für nichtnegative Treppenfunktionen. Für eine nichtnegative $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$-messbare Funktion $f \geq 0$ existiert nach Satz 7.2 eine Folge nichtnegativer $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$-Treppenfunktionen (f_n) mit $f_n \nearrow f$ auf

$X \times Y$. Nach Lemma 10.9 ist für alle $x \in X$ die Funktion $f(x,\cdot)$ nichtnegativ, $\mathcal{C}$-messbar und die nichtnegativen $\mathcal{C}$-Treppenfunktionen $f_n(x,\cdot)$ erfüllen $f_n(x,\cdot) \nearrow f(x,\cdot)$. Der Satz von Levi (Satz 7.8) impliziert für alle $x \in X$

$$\int_Y f_n(x,y)\,d\nu(y) \nearrow \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,. \tag{10.11}$$

Da f_n Treppenfunktionen sind, ist die linke Seite nach Satz 10.1 $\mathcal{A}$-messbar, woraus mit Satz 2.9 folgt, dass auch die rechte Seite $\mathcal{A}$-messbar ist. Aus dem Satz von Levi, der schon bewiesenen Behauptung für nichtnegative Treppenfunktionen, erneut dem Satz von Levi und (10.11) folgt

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} f_n\,d\mu\otimes\nu\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\int_Y f_n(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_X\left(\lim_{n\to\infty}\int_Y f_n(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\,.\end{aligned}$$

Für vertauschte Rollen von μ und ν argumentiert man entsprechend.

(ii) Sei nun $0 \le f \in \mathcal{L}^*(\mu\otimes\nu)$. Dann gibt es $D \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$ so, dass f auf D definiert ist und $\mu\otimes\nu\big((X\times Y)\setminus D\big) = 0$. Auf Grund von Bemerkung 7.10 ist also $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_D f\,d\mu\otimes\nu$. Wir betrachten die durch $\bar f(x,y) = f(x,y)$ falls $(x,y)\in D$, und $\bar f(x,y) = 0$ falls $(x,y)\notin D$, definierte Fortsetzung $\bar f$, die nach Bemerkung 2.14 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}$-messbar ist. Da $\bar f \ge 0$ gilt auf Grund von (i) die Behauptung des Satzes für $\bar f$. Dies und Lemma 7.13 liefert

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu &= \int_{X\times Y}\bar f\,d\mu\otimes\nu\\ &= \int_Y\left(\int_X \bar f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist die Funktion $y \mapsto \int_X \bar f(x,y)\,d\mu(x)$ $\mathcal{C}$-messbar. Da $\bar f(x,y) = f(x,y)$ für alle $y\in Y$, $x \in D^y$ und $\bar f(x,y) = 0$ für alle $y \in Y$, $x\in X\setminus D^y$, folgt

$$\int_X \bar f(x,y)\,d\mu(x) = \int_{D^y} f(x,y)\,d\mu(x)\,.$$

Aus $\mu\otimes\nu\big((X\times Y)\setminus D\big) = 0$ und Folgerung 10.8 folgt, dass es eine Menge $N \in \mathcal{N}(\nu)$ gibt so, dass $\mu(X\setminus D^y) = 0$ für alle $y \in Y\setminus N$. Somit gilt wiederum mit Bemerkung 7.10 $\int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_{D^y} f(x,y)\,d\mu(x)$ für alle $y \in Y\setminus N$ und die auf $Y\setminus N$ definierte Funktion $y\mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ ist also ν-messbar. Weiterhin haben wir $\int_N \left(\int_{D^y} f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = 0$, da $\nu(N) = 0$. Aus diesen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} \int_Y \left(\int_X \bar{f}(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int_{Y \setminus N} \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)\,, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Bemerkung 7.10 auf die ν-messbare Funktion $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ angewendet haben. Für vertauschte Rollen von μ und ν argumentiert man entsprechend. Somit ist der Satz für $0 \le f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ bewiesen.

(iii) Sei nun $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ beliebig. Sei zum Beispiel $\int_{X \times Y} f^-\, d\mu \otimes \nu < \infty$. Aus (ii) folgt insbesondere, dass die Funktionen $H(y) := \int_X f^+(x,y)\, d\mu(x)$, $G(y) := \int_X f^-(x,y)\, d\mu(x)$ ν-messbar sind, und dass

$$\int_{X \times Y} f^-\, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_X f^-(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty\,.$$

Also ist $G \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Nach Folgerung 7.15 gibt es eine ν-Nullmenge $N \subset Y$ mit $\int_X f^-(x,y)\, d\mu(x) < \infty$ für alle $y \in Y \setminus N$. Folglich ist das Integral $\int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ für alle $y \in Y \setminus N$ definiert, und die Funktion

$$F(y) := \int_X f(x,y)\, d\mu(x) = H(y) - G(y)$$

ist ν-messbar. Ferner gilt

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right)^- d\nu(y) \le \int_Y \left(\int_X f^-(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty\,.$$

Somit ist $F^- \in \mathcal{L}^1(\nu)$ und also $F \in \mathcal{L}^*(\nu)$. Aus der punktweisen Identität $F^+ + G = H + F^-$, Lemma 7.9, der Definition des Integrals $\int_Y F\, d\nu$ und $G, F^- \in \mathcal{L}^1(\nu)$ folgt $\int_Y F\, d\nu = \int_Y H\, d\nu - \int_Y G\, d\nu$. Dies und (ii) liefert also

$$\begin{aligned} &\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &\quad = \int_Y \left(\int_X f^+(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) - \int_Y \left(\int_X f^-(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &\quad = \int_{X \times Y} f^+\, d\mu \otimes \nu - \int_{X \times Y} f^-\, d\mu \otimes \nu \\ &\quad = \int_{X \times Y} f\, d\mu \otimes \nu\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz von Fubini bewiesen. □

10.12 Bemerkung. Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind für $\mu \otimes \nu$-messbares f erfüllt, falls $f \geq 0$, oder wenn

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \quad \text{bzw.} \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty \, .$$

Dies ist klar für $f \geq 0$. Sei zum Beispiel das zweite Integral endlich, dann ist

$$\int_{X \times Y} |f| \, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty,$$

und somit ist f integrierbar bezüglich $\mu \otimes \nu$ nach dem Majorantenkriterium (Satz 7.17 (iv)).

10.13 Beispiel. Wir betrachten dem Maßraum $([0,1], \mathcal{M}(\lambda^1)|_{[0,1]}, \lambda^1|_{[0,1]})$ und das dadurch auf $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definierte Produktmaß $\lambda^1|_{[0,1]} \otimes \lambda^1|_{[0,1]}$. Obwohl $\lambda^1|_{[0,1]}$ vollständig ist, ist $\lambda^1|_{[0,1]} \otimes \lambda^1|_{[0,1]}$ nicht vollständig. Für $y \in [0,1]$ und $M \notin \mathcal{M}(\lambda^1)|_{[0,1]}$ setzen wir $A := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\big|\, x \in M\}$. Aus Folgerung 5.31 folgt, dass $A \notin \mathcal{M}(\lambda^1)|_{[0,1]} \otimes \mathcal{M}(\lambda^1)|_{[0,1]}$, da $A^y = M \notin \mathcal{M}(\lambda^1)|_{[0,1]}$. Andererseits ist $A \subset [0,1] \times \{y\}$ und $[0,1] \times \{y\}$ ist offenbar eine $\lambda^1|_{[0,1]} \otimes \lambda^1|_{[0,1]}$-Nullmenge.

Das vorherige Beispiel zeigt, dass im Allgemeinen das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ nicht vollständig ist. Somit ist Satz 10.10 nicht geeignet um die Berechnung von Integralen bezüglich des Lebesguemaßes λ^n auf n Integrationen bezüglich des eindimensionalen Lebesguemaßes λ^1 zu reduzieren. Um diese Situation zu behandeln betrachten wir die Vervollständigung des Produktmaßes. Wir bezeichnen mit $(X \times Y, \mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{C}, \mu \bar{\otimes} \nu)$ die in Satz 1.20 konstruierte Vervollständigung des Maßraumes $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}, \mu \otimes \nu)$. Es gilt folgende Charakterisierung von $(X \times Y, \mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{C}, \mu \bar{\otimes} \nu)$.

10.14 Satz. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ vollständige, σ-endliche Maßräume. Sei $\mathcal{Q}$ der Halbring der messbaren Quader aus $X \times Y$ und λ das durch die Einschränkung des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{Q}$ gegebene Prämaß. Sei τ die Carathéodory-Fortsetzung von λ aus Satz 5.21. Dann ist $(X \times Y, \mathcal{A} \bar{\otimes} \mathcal{C}, \mu \bar{\otimes} \nu) = (X \times Y, \mathcal{M}(\tau), \tau|_{\mathcal{M}(\tau)})$.*

Beweis: Aus Bemerkung 5.22 folgt, dass $\tau|_{\mathcal{M}(\tau)}$ die auf $\mathcal{M}(\tau)$ eindeutige Vervollständigung des Maßes $\tau|_{\sigma(\mathcal{Q})}$ ist. Da $\sigma(\mathcal{Q}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ und das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ eindeutig auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ ist (Satz 10.5) haben wir $\tau|_{\sigma(\mathcal{Q})} = \mu \otimes \nu$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Wenn wir den vorherigen Satz auf das Lebesguemaß anwenden, erhalten wir sofort.

10.15 Folgerung. *Das Lebesguemaß λ^{n+k} auf $\mathcal{M}(\lambda^{n+k})$ ist die Vervollständigung der Produktmaßes der Lebesguemaße λ^n auf $\mathcal{M}(\lambda^n)$ und λ^k auf $\mathcal{M}(\lambda^k)$, d.h. $\lambda^{n+k} = \lambda^n \bar{\otimes} \lambda^k$.*

Somit ist die folgende Variante des Satzes von Fubini in Anwendungen sehr hilfreich.

10.16 Satz (Fubini). *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ vollständige, σ-endliche Maßräume und sei $f \in \mathcal{L}^*(\mu \mathbin{\bar{\otimes}} \nu)$. Dann ist die Funktion $f(x, \cdot)$ ν-messbar für μ-fast-alle $x \in X$ und die Funktion $f(\cdot, y)$ μ-messbar für ν-fast-alle $y \in Y$. Weiter gilt:*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\mu \mathbin{\bar{\otimes}} \nu &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung zuerst für Indikatorfunktionen. Für $M \in \mathcal{A} \mathbin{\bar{\otimes}} \mathcal{C}$ existieren disjunkte Mengen A und N so, dass $M = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, $N \subset B \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$ und $\mu \otimes \nu(B) = 0$. Satz 10.10 und Folgerung 7.15 liefern

$$\int_X \chi_B(x,y)\, d\mu(x) = 0$$

für ν-fast-alle $y \in Y$. Da μ vollständig ist, ist $\chi_N(\cdot, y)$ für ν-fast-alle $y \in Y$ μ-messbar und somit gilt mithilfe des Majorantenkriteriums (Satz 7.17 (iv))

$$\int_X \chi_N(x,y)\, d\mu(x) = 0$$

für ν-fast-alle $y \in Y$. Somit ist die Funktion $y \mapsto \int_X \chi_N(x,y)\, d\mu(x)$ ν-messbar. Auf Grund der Definition der Vervollständigung des Maßes $\mu \otimes \nu$, des Satzes 10.10 und $\chi_M = \chi_A + \chi_N$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \chi_M\, d\mu \mathbin{\bar{\otimes}} \nu = \mu \mathbin{\bar{\otimes}} \nu(M) &= \mu \otimes \nu(A) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_A(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_M(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)\,.\end{aligned}$$

Für vertauschte Rollen von μ und ν argumentiert man entsprechend.

Danach geht man wie im Beweis von Satz 10.10 vor, wobei man die folgende Modifikation von Lemma 10.9 benutzen muss: Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ vollständige, σ-endliche Maßräume. Sei f $\mathcal{A} \mathbin{\bar{\otimes}} \mathcal{C}$-messbar, dann ist für μ-fast-alle $x \in X$ die Funktion $f(x, \cdot)$ $\mathcal{C}$-messbar. □

10.17 Beispiel. Wir berechnen das Lebesguemaß $\alpha_n = \lambda^n(B_1(0))$ der n-dimensionalen Kugel $B_1(0) = \{z \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |z| < 1\}$. Aus Satz 10.16 folgt mit der Substitution $y = \cos\vartheta$

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_{-1}^{1} \lambda^{n-1}\big(\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,\big|\, |x| < \sqrt{1-y^2}\}\big)\, dy \\ &= \alpha_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dy = \alpha_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^n \vartheta \, d\vartheta =: \alpha_{n-1}\, A_n \,.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration ergibt sich die Rekursionsformel $A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}$ für $n \geq 2$, wobei $A_0 = \pi$ und $A_1 = 2$. Es folgt

$$\begin{aligned}A_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot A_0 = \pi \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \\ A_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot A_1 = 2 \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}.\end{aligned}$$

Also gilt $A_{2k+1}A_{2k} = \frac{2\pi}{2k+1}$ bzw. $A_{2k}A_{2k-1} = \frac{\pi}{k}$, und somit

$$\begin{aligned}\alpha_{2k} &= (A_{2k}A_{2k-1}) \cdot \ldots \cdot (A_2\, A_1)\alpha_0 = \frac{\pi^k}{k!}, \\ \alpha_{2k+1} &= (A_{2k+1}A_{2k}) \cdot \ldots \cdot (A_3\, A_2)\alpha_1 = \frac{\pi^k}{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2}) \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

10.18 Beispiel. Ein Beispiel, wo die iterierten Integrale existieren aber verschieden sind, ist

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}\,.$$

Beachte dabei, dass der Integrand durch $f(x,y) = \partial_x\partial_y \arctan\frac{x}{y}$, $y > 0$, gegeben ist und $\partial_x \arctan\frac{x}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\partial_y \arctan\frac{x}{y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$ gilt. In diesem Fall folgt aus dem Satz von Fubini, dass das Integral bezüglich des (vervollständigten) Produktmaßes nicht existiert. Es kommt aber auch vor, dass die iterierten Integrale gleich sind, und dennoch das Integral bezüglich des (vervollständigten) Produktmaßes nicht definiert ist:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx = 0,$$

aber das λ^2-Integral über $[-1,1]^2$ existiert nicht wegen

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^2} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, d\lambda^2(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = \infty.\end{aligned}$$

10.19 Beispiel. Sei μ ein σ-endliches Maß auf X und $f : X \to [0,\infty]$ sei μ-messbar. Ist die Funktion $\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$, sowie auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar mit $\varphi'(t) \geq 0$, so gilt

$$\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^\infty \varphi'(t)\, \mu\big(\{x \in X \,\big|\, f(x) > t\}\big)\, dt\,.$$

Betrachte dazu den Subgraph $E = \{(x,t) \in X \times [0,\infty) \,\big|\, t < f(x)\}$. Die Funktionen $(x,t) \mapsto t$, $(x,t) \mapsto f(x)$ und $(x,t) \mapsto \varphi'(t)$ sind $\mu \otimes \lambda^1$-messbar. Folglich ist auch E $\mu \otimes \lambda^1$-messbar und die Funktion $(x,t) \mapsto \varphi'(t)\chi_E(x,t)$ ist $\mu \otimes \lambda^1$-messbar. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) &= \int_X \int_0^\infty \varphi'(t)\, \chi_E(x,t)\, dt\, d\mu(x) \\
&= \int_E \varphi'(t)\, d(\mu \otimes \lambda^1)(x,t) \\
&= \int_0^\infty \int_X \varphi'(t)\, \chi_E\,(x,t)\, d\mu(x)\, dt \\
&= \int_0^\infty \varphi'(t)\, \mu\big(\{x \in X \,\big|\, f(x) > t\}\big)\, dt.
\end{aligned}$$

Für $\varphi(t) = t^p$ mit $p > 0$ und $f : X \to \mathbb{R}$ μ-messbar folgt zum Beispiel

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_0^\infty p\, t^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > t\})\, dt.$$

Als weitere Anwendung des Satzes von Fubini zeigen wir die folgende Version der partiellen Integration im $\mathbb{R}^n$.

10.20 Satz (Partielle Integration). *Seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f, \partial_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $g, \partial_j g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, und $p, q \in [1,\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f) g\, d\lambda^n = -\int_{\mathbb{R}^n} f(\partial_j g)\, d\lambda^n.$$

Beweis: Es reicht aus, die folgende Behauptung zu beweisen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j h\, d\mathcal{L}^n = 0 \text{ für alle } h \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ mit } h, \partial_j h \in L^1(\mathbb{R}^n). \qquad (10.21)$$

In der Tat folgt aus den Voraussetzung an f, g und der Hölderschen Ungleichung $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sowie $\partial_j(fg) = (\partial_j f)g + f(\partial_j g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also ergibt sich aus (10.21) für $h = fg$

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j(fg)\, d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j f) g\, d\lambda^n + \int_{\mathbb{R}^n} f(\partial_j g)\, d\lambda^n,$$

und die Behauptung des Satzes ist bewiesen. Wir zeigen (10.21) zunächst unter der Annahme, dass es ein $R > 0$ gibt mit $h(x) = 0$ für $|x_j| \geq R$. Der Satz von Fubini ergibt für $x = (\xi, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j h(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_j h(\xi, x_n)\, d\lambda^{n-1}(\xi)\, d\lambda^1(x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_j h(\xi, x_n)\, d\lambda^1(x_n)\, d\lambda^{n-1}(\xi)\,.\end{aligned}$$

Für $j = n$ ist das rechte Integral Null nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, und für $1 \leq j \leq n-1$ verschwindet das mittlere Integral nach Induktion. Ist h beliebig wie in (10.21), so wähle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ sowie

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |t| \geq 2, \end{cases}$$

und definiere $\eta_R(x) = \varphi\big(x_j/R\big)$. Dann ist $(\eta_R h)(x) = 0$ für $|x_j| \geq 2R$, und es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_R \partial_j f\, d\lambda^n = -\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j \eta_R) f\, d\lambda^n\,.$$

Nun gilt $\eta_R(x) = 1$ für $|x_j| \leq R$, insbesondere $\eta_R \to 1$ und $\partial_j \eta_R \to 0$ punktweise auf $\mathbb{R}^n$ mit $R \to \infty$. Außerdem haben wir mit $C := \max|\varphi'|$ die Abschätzungen

$$|\eta_R(\partial_j f)| \leq |\partial_j f| \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad |(\partial_j \eta_R) f)| \leq \frac{C}{R}|f| \in L^1(\mathbb{R}^n)\,.$$

Behauptung (10.21) folgt nun mit $R \to \infty$ aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue. □

10.22 Folgerung (Partielle Integration). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Für $f \in C_0^1(\Omega)$ und $g \in C^1(\Omega)$ gilt*

$$\int_\Omega (\partial_j f) g\, d\lambda^n = -\int_\Omega f(\partial_j g)\, d\lambda^n \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n\,.$$

Ist $X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ so gilt außerdem

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, X\rangle\, d\lambda^n = -\int_\Omega f(\operatorname{div} X)\, d\lambda^n\,.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $fg \in C_0^1(\Omega)$, also $\int_\Omega \partial_j(fg)\, dx = 0$. Die zweite Fassung folgt durch Ausschreiben in Koordinaten aus der ersten. □

Die Verallgemeinerung des Satzes von Fubini auf kartesiche Produkte mit endlich vielen (statt nur zwei) Faktoren soll hier nicht ausgeführt werden. Der Satz von Fubini wird durch Induktion über die Anzahl der Faktoren verallgemeinert, wobei die Reihenfolge der Integrationen bezüglich der einzelnen Variablen beliebig gewählt werden kann.

2.11 Der Satz von Radon-Nikodym

Ziel diese Abschnitts ist eine Charakterisierung der Maße, die bzgl. eines gegebenen Maßes eine Dichte besitzen. Als erstes betrachten wir die Integration einer nichtnegativen Dichtefunktion über Mengen aus einer σ–Algebra.

11.1 Satz (Maß mit Dichtefunktion). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und θ eine nichtnegative μ-messbare Funktion auf X. Dann ist die auf $\mathcal{A}$ definierte Mengenfunktion*

$$\nu(A) := \int_A \theta \, d\mu = \int_X \theta \chi_A \, d\mu \,, \qquad A \in \mathcal{A} \,,$$

ein Maß, das mit μ_θ bezeichnet wird. Es gelten folgende Aussagen:

(i) $\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_\theta(A) = 0.$

(ii) $\int_X f \, d\mu_\theta = \int_X f\theta \, d\mu$ *für alle μ-messbaren nichtnegativen Funktionen f.*

Man nennt θ die Dichte *von ν bzgl. μ.*

Beweis: Ist $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so folgt mit monotoner Konvergenz (Folgerung 8.4)

$$\nu(A) = \int_X \theta \chi_A \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^\infty \theta \chi_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_X \theta \chi_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) \,.$$

Wegen $\chi_\emptyset \equiv 0$ ist $\nu(\emptyset) = 0$, d.h. ν ist ein Maß auf $\mathcal{A}$. Für $\mu(A) = 0$ folgt mit Bemerkung 7.6

$$\mu_\theta(A) = \int_A \theta \, d\mu = 0 \,.$$

Weiter gilt für $A \in \mathcal{A}$

$$\int_X \chi_A \, d\mu_\theta = \mu_\theta(A) = \int_X \chi_A \theta \, d\mu.$$

Damit folgt (ii) für alle nichtnegativen Treppenfunktionen φ. Für eine beliebige μ-messbare Funktion $f \geq 0$ wähle eine Folge nichtnegativer Treppenfunktionen φ_k mit $\varphi_k \nearrow f$ μ-fast-überall nach Satz 7.2, und schließe wieder mit monotoner Konvergenz

$$\int_X f \, d\mu_\theta = \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k \, d\mu_\theta = \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_k \theta \, d\mu = \int_X f\theta \, d\mu \,. \qquad \square$$

11.2 Bemerkung. Ist zusätzlich θ integrierbar, d.h. $\theta \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so lässt sich Aussage (i) von Satz 11.1 wie folgt verschärfen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für $A \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \mu_\theta(A) < \varepsilon \,. \tag{11.3}$$

Denn mit $\theta_k = \min(\theta, k)$ gilt die Abschätzung

$$\mu_\theta(A) = \int_A \theta \, d\mu = \int_A (\theta - \theta_k) \, d\mu + \int_A \theta_k \, d\mu \le \int_X (\theta - \theta_k) \, d\mu + k \, \mu(A) \, .$$

Nach Satz 8.2 können wir $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen so, dass

$$\int_X (\theta - \theta_k) \, d\mu = \int_X \theta \, d\mu - \int_X \theta_k \, d\mu < \varepsilon/2 \, .$$

Die Bemerkung folgt für $\mu(A) < \varepsilon/(2k) =: \delta$.

Aus Satz 11.1 (i) folgt, dass nicht beliebige Maße eine Dichte besitzen können. Die Implikation aus Satz 11.1 (i) spielt im Weiteren eine große Rolle und deshalb geben wir ihr einen Namen.

11.4 Definition. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{A}, \nu)$ Maßräume. Wir sagen, dass ν* absolutstetig *bzgl. μ ist, in Zeichen $\nu \ll \mu$, falls $\nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$.*

Wir werden im Wesentlichen zeigen, dass aus $\nu \ll \mu$ die Existenz einer Dichte θ folgt, so dass $\nu = \mu_\theta$.

11.5 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{A}, \sigma)$, $(X, \mathcal{A}, \nu)$ endliche Maßräume, so dass $\nu(A) \le \sigma(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann existiert eine nichtnegative Funktion $\theta \in L^2(\sigma)$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$*

$$\nu(A) = \int_A \theta \; d\sigma \, .$$

Beweis: Für alle $g \in L^2(\sigma)$ existieren nach Satz 7.2 J nichtnegative Treppenfunktionen g_n mit $g_n \nearrow |g|^2$ σ-fast-überall und ν-fast-überall. Satz 8.2, die Definition des Integrals von Treppenfunktionen sowie $\nu(A) \le \sigma(A)$ implizieren

$$\int_X |g|^2 \, d\sigma = \lim \int_X g_n \, d\sigma \ge \lim \int_X g_n \, d\nu = \int_X |g|^2 \, d\nu \, ,$$

d.h. $g \in L^2(\nu)$. Insbesondere folgt

$$\int_X h \, d\sigma \ge \int_X h \, d\nu \tag{11.6}$$

für alle nichtnegativen Funktionen $h \in L^1(\sigma)$. Da ν endlich ist, folgt mit der Hölderschen Ungleichung (Lemma 9.5)

$$\Big| \int_X g \, d\nu \Big| \le \int_X |g| \, d\nu \le \nu(X)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\nu)} < \infty \tag{11.7}$$

für alle $g \in L^2(\sigma)$. Somit können wir für alle $g \in L^2(\sigma)$ definieren

$$J(g) := \int_X |g|^2\, d\sigma - 2\int_X g\ d\nu\,,$$

d.h. J ist ein *Funktional* auf $L^2(\sigma)$, d.h. J ist eine Funktion, die auf Funktionen aus $L^2(\sigma)$ definiert ist. Mit (11.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} J(g) &\geq \int_X |g|^2\, d\sigma - 2\int_X |g|\, d\nu \\ &\geq \int_X |g|^2\, d\sigma - 2\int_X |g|\, d\sigma \\ &= \int_X (|g|^2 - 1)^2 - 1\, d\sigma \geq -\sigma(X) > -\infty\,, \end{aligned}$$

da σ ein endliches Maß ist. Also folgt

$$c := \inf\{J(g) \,\big|\, g \in L^2(\sigma)\} \in \mathbb{R}\,,$$

und somit gibt es eine Folge $(f_n) \subset L^2(\sigma)$ mit $J(f_n) \to c$. Man rechnet leicht nach, dass für alle $g, h \in L^2(\sigma)$ gilt

$$\frac{1}{2}\|g-h\|_2^2 = J(g) + J(h) - 2J\left(\frac{1}{2}(g+h)\right)\,.$$

Daraus folgern wir

$$\frac{1}{2}\int |f_j - f_k|^2\, d\sigma \leq J(f_j) + J(f_k) - 2c \to 0\,,$$

d.h. (f_k) ist eine Cauchyfolge in $L^2(\sigma)$. Nach Satz 9.10 existiert ein $f \in L^2(\sigma)$ mit $f_k \to f$ in $L^2(\sigma)$. Aus (11.7) folgt auch $\int_X f_k\, d\nu \to \int_X f\, d\nu$ und somit $J(f_k) \to J(f) = c$. Da $\sigma(A) < \infty$ folgt $f + t\chi_A \in L^2(\sigma)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $t \in R$ und also

$$J(f) \leq J(f + t\chi_A)\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(f + t\chi_A) - J(f) \\ &= 2t\int_X f\chi_A\, d\sigma + t^2\int_X \chi_A^2\, d\sigma - 2t\int \chi_A\, d\nu \\ &= 2t\left(\int_A f\, d\sigma - \nu(A)\right) + t^2\sigma(A)\,. \end{aligned}$$

Eine einfache Fallunterscheidung ($t > 0$, $t < 0$) liefert für $t \neq 0$

$$\left|\int_A f\, d\sigma - \nu(A)\right| \leq \frac{1}{2}|t|\sigma(A)\,.$$

Der Grenzwert $|t| \to 0$ liefert die Behauptung. $\square$

11.8 Bemerkung. Das vorherige Lemma ist im Spezialfall des Rieszschen Darstellungssatzes für Hilberträume. Durch

$$F(g) := \int_X g \; d\nu$$

wird auf $L^2(\sigma)$ ein lineares stetiges Funktional definiert. Da $L^2(\sigma)$ ein Hilbertraum ist, d.h. ein Banachraum mit Skalarprodukt $(f,g)_2 := \int fg \; d\sigma$, besagt der Rieszsche Darstellungssatz, dass es eine Funktion $f \in L^2(\sigma)$ gibt, so dass für alle $g \in L^2(\sigma)$ gilt:

$$F(g) = (f,g)_2 = \int_X fg \; d\sigma.$$

Wenn mann nun $g = \chi_A, A \in \mathcal{A}$, wählt, erhält man die Behauptung aus Lemma 11.5

11.9 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum, seien μ, ν Maße auf A und sei $\sigma := \mu + \nu$. Falls $f \in \mathcal{L}^*(\sigma)$, dann ist $f \in \mathcal{L}^*(\mu) \cap \mathcal{L}^*(\nu)$ und es gilt*

$$\int_X f \, d\sigma = \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\nu \, .$$

Beweis: Sei f σ-messbar, d.h. es existiert einen Menge $D \in \mathcal{A}$ so dass $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}|_D$-messbar ist und $\sigma(X \setminus D) = 0$. Aus den Voraussetzungen folgt $\mu(X \setminus D) = \nu(X \setminus D) = 0$ und somit ist f auch μ-messbar und ν-messbar. Um die Behauptung zu beweisen, betrachten wir zunächst eine nichtnegative Treppenfunktion $s \geq 0$, d.h. $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{A}$. Es gilt

$$\int_X s \; d\sigma = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \big(\mu(A_i) + \nu(A_i)\big) = \int_X s \; d\mu + \int_X s \; d\nu \, .$$

Sei nun $f \geq 0$ σ-messbar. Folgerung 7.2 liefert die Existenz von Treppenfunktionen $s_n \geq 0$ mit $s_n \nearrow f$ σ-fast-überall. Mithilfe des Satzes von Levi (Satz 8.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_X f \, d\sigma &= \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \; d\sigma = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n \; d\mu + \int_X s_n \; d\nu \right) \\ &= \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\nu \, .\end{aligned}$$

Für allgemeine Funktionen $f \in \mathcal{L}^*(\sigma)$ folgt dei Behauptung mithilfe der Zerlegung $f = f^+ - f^-$. $\square$

11.10 Satz (Radon-Nikodym). *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X, \mathcal{A}, \nu)$ endliche Maßräume mit $\nu \ll \mu$. Dann gibt es eine eindeutige nichtnegative Funktion $\theta \in L^1(\mu)$, so dass*

$$\nu(A) = \int_A \theta \; d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit von θ. Seien also $0 \leq \theta_1, \theta_2 \in L^1(\mu)$ so, dass

$$\nu(A) = \int_A \theta_1 \; d\mu = \int_A \theta_2 \; d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Daraus folgt $0 = \int_A \theta_1 - \theta_2 \; d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und Folgerung 7.16 liefert $\theta_1 = \theta_2$ μ-fast-überall, d.h. $[\theta_1] = [\theta_2]$ und somit sind die Funktionen θ_1, θ_2 als Elemente aus $L^1(\mu)$ identisch.

Um die Existenz zu zeigen, definieren wir durch $\sigma := \mu + \nu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Da $\nu(A) \leq \sigma(A) = \mu(A) + \nu(A)$, folgt aus Lemma 11.5 die Existenz einer nichtnegativen Funktion $0 \leq \omega \in L^2(\sigma)$ so, dass

$$\nu(A) = \int_A \omega \; d\sigma \tag{11.11}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Dies und die Definition von σ liefern

$$0 \leq \int_A \omega \; d\sigma = \nu(A) \leq \sigma(A) = \int_A 1 \; d\sigma \,.$$

Folgerung 7.16 impliziert somit $0 \leq \omega \leq 1$ σ-fast-überall. Wir wählen nun einen Repräsentanten von ω und setzen $E := \{\omega = 1\}$. Aus

$$\nu(E) = \int_E \omega \; d\sigma = \sigma(E)$$

und der Definition von σ folgt $\mu(E) = 0$. Da $\nu \ll \mu$ erhalten wir $\nu(E) = 0$. Also ist auch $\sigma(E) = 0$ und wir haben gezeigt, dass $0 \leq \omega < 1$ σ-fast-überall. OBdA können wir also annehmen, dass

$$0 \leq \omega < 1 \qquad \text{überall auf } X \,. \tag{11.12}$$

Da σ endlich ist, wissen wir auch, dass $\omega \in L^1(\sigma)$. Lemma 11.9 liefert also $\omega \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ und wir erhalten für all $A \in \mathcal{A}$

$$\int_X \chi_A \; d\nu = \nu(A) = \int_X \chi_A \omega \; d\sigma = \int_X \chi_A \omega \; d\mu + \int_X \chi_A \omega \; d\nu \,,$$

oder anders geschrieben

$$\int_X \chi_A \omega \; d\mu = \int_X \chi_A (1 - \omega) \; d\nu \,.$$

Mithilfe des üblichen Vorgehens, d.h. Approximation mit Treppenfunktionen (Satz 7.2) und des Satzes von Levi (Satz 8.2) folgern wir also für alle μ-messbaren $g \geq 0$

$$\int_X g \, \omega \; d\mu = \int_X g(1 - \omega) \; d\nu$$

(man beachte, dass aus $\nu \ll \mu$ folgt, dass g auch μ-messbar ist).

Wenn wir hierin nun $g = g_A := \dfrac{\chi_A}{1-\omega}$, $A \in \mathcal{A}$ wählen, was aufgrund von (11.12) wohldefiniert ist, erhalten wir

$$\int_X \chi_A \frac{\omega}{1-\omega} d\mu = \int_X \chi_A \frac{1-\omega}{1-\omega} d\nu = \int_X \chi_A d\nu$$

d.h.

$$\int_A \frac{\omega}{1-\omega} d\mu = \nu(A)\,.$$

Wenn wir nun $\theta := \dfrac{\omega}{1-\omega}$ setzen folgt die Behauptung, da $0 \le \theta$ und

$$\int_X \theta \, d\mu = \nu(X) < \infty\,.$$

Insbesondere ist $\theta \in L^1(\mu)$. □

Die Funktion θ aus Satz 11.10 nennt man *Dichte* oder *Radon–Nikodym Ableitung* von ν bzgl. ν. Diese wird manchmal mit $\frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet.

11.13 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum, und seien μ, ν endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\nu \ll \mu$

(ii) *Es existiert eine nichtnegative Funktion $\theta \in L^1(\mu)$ so, dass für alle $A \in \mathcal{A}$.*

$$\nu(A) = \int\limits_A \theta \, d\mu\,.$$

(iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $A \in \mathcal{A}$ aus $\mu(A) < \delta$ folgt $\nu(A) < \varepsilon$.*

Beweis: Die Implikation (i) ⇒ (ii) ist gerade Satz 11.10. Die Implikation (ii) ⇒ (iii) wurde in Bemerkung 11.2 bewiesen, und die Implikation (iii) ⇒ (i) ist sofort klar. □

Wir wollen nun noch Satz 11.10 auf σ-endlich Maße verallgemeinern.

11.14 Satz. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum, und seien μ, ν σ-endliche Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\nu \ll \mu$. Dann gibt es eine nichtnegative μ-messbare Funktion $\theta \in \mathcal{L}^*(\mu)$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$*

$$\nu(A) = \int_A \theta d\mu\,.$$

Die Funktion θ ist eindeutig bis auf μ-fast-überall Gleichheit.

Beweis: Da μ und ν σ-endlich sind, gibt es monoton wachsende Folgen $(A_n), (B_n) \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty, \nu(B_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = X$. Wenn wir $C_n := A_n \cap B_n$ setzen, dann ist auch die Folge (C_n) monoton wachsend und es gilt $\mu(C_n) < \infty, \nu(C_n) < \infty$, sowie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$.

Wenn wir $\mu_n := \mu|_{C_n}, \nu_n := \nu|_{C_n}$ und $\mathcal{A}_n := \mathcal{A}|_{C_n}$ setzen, sind μ_n, ν_n offenbar endliche Maße auf $\mathcal{A}_n$ mit $\nu_n \ll \mu_n$.

Satz 11.10 liefert also die Existenz nichtnegativer Funktionen $\theta_n \in L^1(\mu_n)$, so dass für alle $M \in \mathcal{A}_n$

$$\nu_n(M) = \int_M \theta_n \, d\mu_n \, .$$

OBdA können wir annehmen, dass θ_n auf ganz C_n definiert, nichtnegativ und $\mathcal{A}_n$-messbar sind. Wir definieren $\overline{\theta}_n := \theta_n$ auf C_n, $\overline{\theta}_n = 0$ sonst. Offenbar sind $\overline{\theta}_n : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-messbar und für alle $M \in \mathcal{A}_n$ gilt

$$\nu_n(M) = \int_M \overline{\theta}_n \, d\mu_n \, .$$

Es gilt $0 \leq \overline{\theta}_n \leq \overline{\theta}_{n+1}$. Da $\mu_{n+1}|_{C_n} = \mu_n$ und $\nu_{n+1}|_{C_n} = \nu_n$ folgt für alle $M \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$

$$\int_M \overline{\theta}_n \, d\mu_n = \nu_n(M) = \nu_{n+1}(M) = \int_M \overline{\theta}_{n+1} \, d\mu_{n+1} = \int_M \overline{\theta}_n d\mu_n \, .$$

Somit ist $\overline{\theta}_n = \overline{\theta}_{n+1}$ μ-fast-überall auf C_n. Da auch $\overline{\theta}_n = 0 \leq \overline{\theta}_{n+1}$ auf $X \setminus C_n$ gilt, ist $\theta(x) := \lim \overline{\theta}_n(x)$ auf X wohldefiniert. Insbesondere ist θ nach Satz 2.9 μ-messbar (vgl. Bemerkung 8.3). Für $M \in \mathcal{A}$ setze $M_n := M \cap C_n$. Offenbar ist die Folge (M_n) monoton wachsend und es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$. Satz 1.17 liefert also

$$\nu_n(M_n) = \nu(M_n) \nearrow \nu(M) \, .$$

Andererseits folgt augrund der Definitionen von M_n und μ_n, sowie dem Satz von Levi (Satz 8.2)

$$\begin{aligned} \nu_n(M_n) &= \int_X \chi_{M_n} \overline{\theta}_n \, d\mu_n = \int_X \chi_{M_n} \overline{\theta}_n d\mu = \int_X \chi_M \overline{\theta}_n d\mu \\ &= \int_M \overline{\theta}_n d\mu \quad \to \quad \int_M \theta d\mu \end{aligned}$$

Da der Grenzwert eindeutig ist, liefern die letzten beiden Konvergenzen die Behauptung des Satzes. □

Um den allgemeinen Fall, d.h. ν ist nicht absolutstetig bzgl. μ behandeln zu können benötigen wir folgenden neuen Begriff.

11.15 Definition. *Seien (X, A, μ) und (X, A, ν) Maßräume. Wir sagen, dass die Maße μ und ν* zueinander singulär sind, *im Zeichen $\mu \perp \nu$, falls es einer Menge $M \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(M) = \nu(X \setminus M) = 0$.*

Beispiel. Das Lebesguemaß λ^1 und die Einschränkung des Diracmaßes in der Null δ_0 auf die Lebesgue-messbaren Mengen sind zueinander singulär.

11.16 Satz (Zerlegungssatz von Lebesgue). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien μ ein Maß und ν ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung $\nu = \nu_a + \nu_s$ mit $\nu_a \ll \mu$ und $\nu_s \perp \mu$. Man nennt ν_a den* absolutstetigen Teil *von ν und ν_s den* singulären Teil *von ν (relativ zu ν).*

Beweis: (i) Wir betrachten zuerst den Fall, dass ν endlich ist und setzen

$$c := \sup \big\{ \nu(B) \mid B \in A,\ \mu(B) = 0 \big\} .$$

Offenbar ist $c \in [0, \infty)$ und somit gibt es Mengen $B_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$, mit $\mu(B_j) = 0$ und $\nu(B_j) \to c$. Für $M := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ erhalten wir $\mu(M) = 0$ und $\nu(M) = c$, da $c \geq \nu(M) \geq \nu(B_j) \to c$. Wir definieren den absolut stetigen und singulären Teil von ν für $A \in \mathcal{A}$ durch

$$\nu_a(A) := \nu(A \setminus M) , \qquad \nu_s(A) := \nu(A \cap M) .$$

Offenbar ist $\nu_z = \nu_a + \nu_s$. Weiterhin haben wir $\nu_s \perp \mu$, da $\mu(M) = 0$ und $\nu_s(X \setminus M) = \nu\big((X \setminus M) \cap M\big) = \nu(\emptyset) = 0$. Um zu zeigen, dass $\nu_a \ll \mu$ betrachten wir zuerst Mengen $B' \in \mathcal{A}$ mit $B' \subseteq X \setminus M$ und $\mu(B') = 0$. Für solche Mengen gilt $\nu(B') = 0$. In der Tat, falls $\nu(B') > 0$, setzen wir $M' := M \cup B' \supseteq M$ und sehen $\nu(M') = \nu(M \cup B') = \nu(M) + \nu(B') > \nu(M) = 0$, da M und B' disjunkt sind, sowie $\mu(M') = \mu(M) + \mu(B') = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von c. Sei nun $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) = 0$. Dann haben wir aufgrund des gerade Gezeigten

$$\nu_a(B) = \nu(B \setminus M) = 0 ,$$

da $\mu(B \setminus M) \leq \mu(B) = 0$ und $B \setminus M \subset X \setminus M$. Also ist $\nu_a \ll \mu$, und die Existenz einer Zerlegung für endliches ν ist bewiesen.

(ii) Sei nun ν σ-endlich. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $X_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}$ mit $\nu(X_k) < \infty$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = X$. Aus (i) folgt die Existenz von Mengen $M_k \in \mathcal{A}$, $M_k \subseteq X_k$, so dass M_k eine Zerlegung von $\nu|_{X_k}$ definiert. Wir setzen $M := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ und

$$\nu_a(A) := \nu(A \setminus M) , \qquad \nu_S(A) := \nu(A \cap M) .$$

Offenbar ist $\nu = \nu_a + \nu_S$. Weiterhin haben wir $\nu_s \perp \mu$, da $\mu(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k) = 0$ und $\nu_s(X \setminus M) = \nu(M \cap (X \setminus M)) = \nu(\theta) = 0$. Um $\nu_a \ll \mu$ zu zeigen betrachten wir wieder $B' \in \mathcal{A}$ mit $B' \subseteq X \setminus M$ und $\mu(B') = 0$. Falls $\nu(B') > 0$ existiert im $k \in \mathbb{N}$ mit $\nu(B' \cap X_k) > 0$. Wie in (i) zeigt man, dass dies zum Widerspruch mit der Konstruktion von M_k führt. Also gilt $\nu(B') = 0$ und man argumentiert wie in (i) um $\nu_a \ll \mu$ zu zeigen.

(iii) Es bleibt die Eindeutigkeit der Zerlegung zu beweisen. Sei $\nu = \nu_a' + \nu_S'$ eine weitere Zerlegung, mit den geforderten Eigenschaften. Dann gibt es eine Menge $M' \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M') = 0 = \nu_S(X \setminus M')$. Für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ setzen wir

$C := A \cap (M \cup M')$ und $D := A \setminus (M \cup M')$. Aus $\mu(C) \le \mu(M) + \mu(M') = 0$ folgt $v_a(C) = \nu'_a(C) = 0$. Dies und die Zerlegungen $\nu = \nu_S + \nu_a = \nu'_S + \nu'_A$ liefern $\nu_S(C) = v_S(C)$. Aus $D \subseteq (X \setminus M) \cap (X \setminus M')$ folgt $\nu_S(D) = \nu'_S(D) = 0$ und somit $\nu_a(D) = \nu'_a(D)$. Aus der disjunkten Zerlegung $A = C \cup D$ folgt somit $\nu_a(A) = \nu'_a(A)$ und $\nu_S(A) = \nu'_S(A)$. □

2.12 Der Transformationssatz

Neben dem Satz von Fubini ist die Transformation auf geeignete Koordinaten das zweite wichtige Hilfsmittel zur Berechnung von Maßen beziehungsweise Integralen im $\mathbb{R}^n$. Eng damit verbunden sind die Darstellungen von Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten.

Zu Anfang des Abschnitts erinnern wir an einige Begriffe aus der Differentialrechnung mehrere Veränderlicher.

12.1 Definition (Diffeomorphismus). *Eine Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^1-*Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv ist und φ, φ^{-1} stetig differenzierbar sind.*

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, offen und sei $f : U \to V$ eine stetig differenzierbare Funktion. Das *Differential* von f an der Stelle $x \in U$ wird mit $Df(x)$ bezeichnet. Oft wird auch die *Jacobimatrix*, d.h. die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $Df(x)$ bzgl. der Standardbasen e_i des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, mit $Df(x)$ bezeichnet. Wir werden im Weiteren mit $Df(x)$ immer die Jacobimatrix bezeichnen, d.h.

$$Df = \big(\partial_1 f, \dots, \partial_n f\big) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

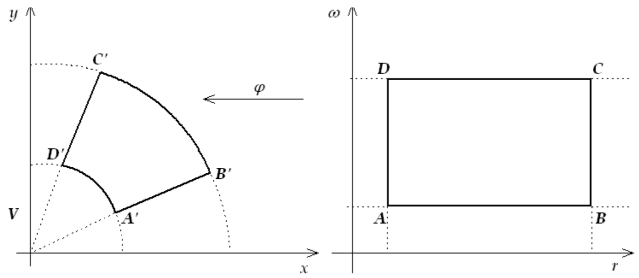
Offenbar haben wir $(Df)e_j = \partial_j f$. Im Spezialfall $m = 1$ ist der *Gradient* von f durch $\operatorname{grad} f(x) := \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) e_i \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Man beachte, dass Elemente des $\mathbb{R}^n$ immer als Spaltenvektoren aufgefasst werden und somit gilt: $\operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)^\top$.

12.2 Beispiel (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$). Betrachte die glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) = U \to V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,\big|\, x \ge 0\}\,, \\ \varphi(r,\omega) = (r\,\cos\omega, r\,\sin\omega)^\top\,. \end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung von φ lautet mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\varphi^{-1}(x,y) = \begin{cases} (r,\, \arccos \frac{x}{r})^\top & \text{falls } y \ge 0, \\ (r,\, 2\pi - \arccos \frac{x}{r})^\top & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$



Für $x < 0$ gilt alternativ $\varphi^{-1}(x,y) = (r, \frac{\pi}{2} + \arccos \frac{y}{r})$, insbesondere ist φ^{-1} glatt auf ganz V und somit φ diffeomorph.

Unser Beweis des Transformationssatzes stützt sich auf folgende infinitesimale Fassung. Dabei verwenden wir für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varrho > 0$ die Bezeichnung

$$Q(x,\varrho) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_\infty \leq \varrho\} \quad \text{mit } \|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$$

das heißt $Q(x,\varrho)$ ist der *achsenparallele Würfel* mit Mittelpunkt x und Kantenlänge 2ϱ.

12.3 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $D\varphi(x_0) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Für eine Folge $Q_j = Q(x_j, \varrho_j) \subset U$ mit $\varrho_j \to 0$ und $x_0 \in Q_j$, $j \in \mathbb{N}$, gilt*

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\lambda^n\big(\varphi(Q_j)\big)}{\lambda^n(Q_j)} \leq |\det D\varphi(x_0)|\,.$$

Beweis: Wir können nach geeigneten Translationen $x_0 = 0$ und $\varphi(0) = 0$ annehmen, außerdem sei zunächst $D\varphi(0) = E_n$. Nach Definition der Differenzierbarkeit gilt dann

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{\|\varphi(x) - \big(\varphi(0) + D\varphi(0)x\big)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \lim_{x\to 0} \frac{\|\varphi(x) - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}\,.$$

Hier können wir die Maximumsnorm verwenden wegen $\|x\|_\infty \leq |x| \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Für $x \in Q_j$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x - x_j\|_\infty + \|x_j - 0\|_\infty \leq 2\varrho_j$, also folgt für j hinreichend groß

$$\|\varphi(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon\,\|x\|_\infty \leq 2\varepsilon\varrho_j \quad \text{für alle } x \in Q_j\,.$$

Dies impliziert die Abschätzung

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_j)\|_\infty \leq \|\varphi(x) - x\|_\infty + \|x - x_j\|_\infty + \|x_j - \varphi(x_j)\|_\infty \leq (1+4\varepsilon)\varrho_j\,,$$

und damit weiter

$$\frac{\lambda^n\big(\varphi(Q_j)\big)}{\lambda^n(Q_j)} \leq (1+4\varepsilon)^n\,.$$

Mit $j \to \infty$ und $\varepsilon \searrow 0$ ergibt sich die Behauptung des Lemmas im Fall $D\varphi(0) = E_n$. Im allgemeinen Fall sei $S = D\varphi(0)$. Wir setzen $\varphi_0 := \tilde{S}^{-1} \circ \varphi$, wobei $\tilde{S}^{-1}$ die lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich ist, deren Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis e_j, $j = 1, \dots, n$, des $\mathbb{R}^n$ die Matrix S^{-1} ist. Somit folgt $D\varphi_0(0) = E_n$. Aus Satz 6.21 und dem gerade Gezeigten folgt

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to\infty} \frac{\lambda^n\big(\varphi(Q_j)\big)}{\lambda^n(Q_j)} &= \limsup_{j\to\infty} \frac{\lambda^n\big(S(\varphi_0(Q_j))\big)}{\lambda^n(Q_j)} \\ &= |\det S| \ \limsup_{j\to\infty} \frac{\lambda^n\big(\varphi_0(Q_j)\big)}{\lambda^n(Q_j)} \\ &\le |\det S| = |\det D\varphi(0)|\,.\end{aligned}$$

□

Es ist praktisch, in der Transformationsformel statt $d\lambda^n$ die klassischen Bezeichungen dx bzw. dy zu verwenden, um zwischen Bild und Urbild zu unterscheiden.

12.4 Satz. (Transformationsformel) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Ist $A \subset U$ λ^n-messbar, so ist auch $\varphi(A)$ λ^n-messbar und es gilt*

$$\lambda^n(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(x)|\, dx\,. \tag{12.5}$$

Weiter gilt für jede λ^n-messbare Funktion $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\int_V f(y)\, dy = \int_{\varphi^{-1}(V)} f(\varphi(x)))\, |\det D\varphi(x)|\, dx\,, \tag{12.6}$$

falls eines der Integrale definiert ist.

Beweis: (i) Wir betrachten auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ der λ^n-messbaren Mengen $A \subset U$ das Maß λ mit Dichte $|\det D\varphi|$, d.h.

$$\lambda(A) := \lambda^n{}_{|\det D\varphi|}(A) = \int_A |\det D\varphi|\, d\lambda^n$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ (vgl. Satz 11.1). Für $\psi = \varphi^{-1} : V \to U$ betrachten wir das (äußere) Bildmaß $\mu := \psi(\lambda^n)$, d.h.

$$\mu(A) = \lambda^n\big(\psi^{-1}(A)\big) = \lambda^n(\varphi(A))$$

für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Für jede λ^n-messbare Menge $A \subset U$ ist $\psi^{-1}(A)$ ebenfalls λ^n-messbar nach Satz 6.17, und damit A μ-messbar nach Satz 3.9. Die Einschränkung des äußeren Maßes μ auf $\mathcal{A}$ ist somit ein Maß. Weiter wurde in den Sätzen 11.1 und 6.17 bewiesen, dass $\lambda \ll \lambda^n$ und $\mu \ll \lambda^n$, d.h.

$$N \subset U \text{ mit } \lambda^n(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(N) = \mu(N) = 0\,. \tag{12.7}$$

(ii) Wir zeigen nun $\lambda \geq \mu$. Indem wir U durch offene, relativ kompakte Mengen ausschöpfen, können wir dabei $\lambda(U) < \infty$ und $\mu(U) < \infty$ voraussetzen. Nach Satz 6.9 ist jede λ^n-messbare Menge von der Form $A = E \setminus N$, wobei $\lambda^n(N) = 0$ und $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ mit offenen $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ (dies kann durch eine einfache Modifikation des Beweises erreicht werden). Wegen Satz 1.17 (ii) (hier brauchen wir $\lambda(U), \mu(U) < \infty$) reicht es daher aus, die Ungleichung auf allen offenen Mengen nachzuweisen. Aber nach Lemma 6.5 ist jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von kompakten, achsenparallelen Würfeln in U mit paarweise disjunktem Inneren darstellbar. Damit bleibt zu zeigen:

$$\lambda(Q_0) \geq \mu(Q_0) \qquad \text{für alle } Q_0 = Q(p_0, \varrho_0) \subset U\,. \tag{12.8}$$

Angenommen es ist $\lambda(Q_0) < \mu(Q_0)$ für ein $Q_0 = Q(p_0, \varrho_0)$. Wähle dann ein $\theta \in [0, 1)$ mit $\lambda(Q_0) < \theta\mu(Q_0)$, und zerlege Q_0 durch Halbierung der Kanten in 2^n kompakte Teilwürfel $Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,2^n}$. Wäre $\lambda(Q_{0,i}) \geq \theta\mu(Q_{0,i})$ für alle i, so folgt durch Summation

$$\lambda(Q_0) = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda(Q_{0,i}) \geq \theta \sum_{i=1}^{2^n} \mu(Q_{0,i}) = \theta\mu(Q_0)\,,$$

ein Widerspruch. Hierbei wurde benutzt, dass die Ränder der $Q_{0,i}$ nach (12.7) jeweils Nullmengen sind. Unter den $Q_{0,i}$ gibt es also einen Würfel Q_1 mit $\lambda(Q_1) < \theta\mu(Q_1)$. Bestimme so induktiv eine Schachtelung $Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots$ mit

$$\lambda(Q_j) < \theta\mu(Q_j) \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}\,. \tag{12.9}$$

Für $x_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j \in U$ gilt wegen der Stetigkeit der Funktion $\det D\varphi$ mit $j \to \infty$

$$\left| \frac{\lambda(Q_j)}{\lambda^n(Q_j)} - |\det D\varphi(x_0)| \right| = \frac{1}{\lambda^n(Q_j)} \left| \int_{Q_j} |\det D\varphi(x)| - |\det D\varphi(x_0)|\, dx \right| \to 0.$$

Zusammen mit Lemma 12.3 folgt aber nun

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{\lambda(Q_j)}{\mu(Q_j)} = \liminf_{j\to\infty} \Big(\frac{\lambda(Q_j)}{\lambda^n(Q_j)} \cdot \frac{\lambda^n(Q_j)}{\mu(Q_j)} \Big) \geq 1.$$

ein Widerspruch zu (12.9). Dies zeigt (12.8) und damit die Ungleichung $\lambda \geq \mu$.

(iii) Für $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt $\{f \circ \varphi < s\} = \varphi^{-1}\big(\{f < s\}\big)$, also ist mit f auch $f \circ \varphi$ λ^n-messbar, und umgekehrt. Es folgt weiter für λ^n-messbares $f : V \to [0, \infty]$

$$\int_{\varphi^{-1}(V)} f(\varphi(x))\, |\det D\varphi(x)|\, dx \geq \int_V f(y)\, dy. \tag{12.10}$$

Und zwar ergibt sich (12.10) erst für $f = \chi_B$, indem wir $A = \psi(B)$ in der Ungleichung $\lambda(A) \geq \mu(A)$ setzen, dann für nichtnegative λ^n-Treppenfunktionen und schließlich für beliebiges, messbares $f \geq 0$ durch Approximation von unten nach Satz 7.2. Um schließlich für $f \geq 0$ die Gleichheit in (12.6) zu zeigen, wenden wir (12.10) auf $\psi : V \to U$ statt φ und auf $g = f \circ \varphi |\det D\varphi|$ an. Dies liefert wegen $1 = \det D(\varphi \circ \psi)(y) = \big(\det D\varphi\big)\big(\psi(y)\big) \det D\psi(y)$

$$\begin{aligned}\int_V f(y)\,dy &= \int_V g\big(\psi(y)\big)|\det D\psi(y)|\,dy \\ &\geq \int_{\varphi^{-1}(V)} g(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(V)} f\big(\varphi(x)\big)|\det D\varphi(x)|\,dx\,.\end{aligned}$$

Damit ist (12.6) für $f \geq 0$ bewiesen, und (12.5) folgt durch Wahl von $f = \chi_{\varphi(A)}$. Für beliebige f zerlegen wir $f = f^+ - f^-$. □

12.11 Beispiel (Gauß-Integral). Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ folgt mit Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right)dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Für Polarkoordinaten $\varphi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,\big|\, x \geq 0\}$ gilt $\det D\varphi(r,\theta) = r$. Da $\{(x,0) \,\big|\, x \geq 0\}$ eine λ^2-Nullmenge ist, folgt aus dem Transformationssatz, und anschließend dem Satz von Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} e^{-r^2} r\,d\lambda^2(r,\theta) = \int_0^\infty e^{-r^2} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) dr = \pi\,.$$

Also gilt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

12.12 Beispiel (Lineare Transformationsformel). Betrachte den Spezialfall von Satz 12.4, dass der Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ Einschränkung einer linearen Abbildung ist, das heißt $\varphi(x) = Sx$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt $D\varphi(x) = S$ für alle $x \in U$, und die Formeln aus dem Transformationssatz lauten, vgl. auch Satz 6.21,

$$\begin{aligned}\lambda^n(\varphi(A)) &= |\det S|\,\lambda^n(A)\,,\\ \int_V f(y)\,dy &= |\det S| \int_{\varphi^{-1}(V)} f(Sx)\,dx\,.\end{aligned}$$

Das nächste Ziel ist die Umrechnung von Differentialoperatoren in neue Koordinaten. Es ist praktisch, dazu folgenden Begriff einzuführen. Für einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die *Gramsche Matrix* $g \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^{n\times n})$, $g = (g_{ij})$, durch

$$g(x) := D\varphi(x)^\top D\varphi(x) \quad \text{bzw.} \quad g_{ij}(x) := \big\langle \partial_i\varphi(x), \partial_j\varphi(x)\big\rangle\,. \tag{12.13}$$

Nach Definition ist $g(x)$ symmetrisch und strikt positiv definit, denn für $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ gilt

$$\langle g(x)v, v\rangle = \langle D\varphi(x)^\top D\varphi(x)v, v\rangle = |D\varphi(x)v|^2 > 0\,,$$

da $D\varphi(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Insbesondere ist $g(x)$ invertierbar. Wir setzen

$$g^{ij}(x) := \big(g(x)^{-1}\big)_{ij}\,, \tag{12.14}$$

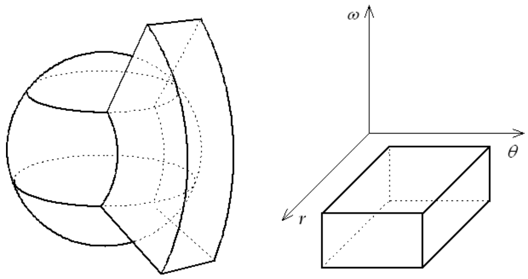
und somit $\sum_{j=1}^n g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$. Wegen $\det g = \det\big(D\varphi^\top D\varphi\big) = |\det D\varphi|^2$ können wir die Transformationsformel alternativ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int_V f(y)\,dy &= \int_{\varphi^{-1}(V)} f\big(\varphi(x)\big)\sqrt{\det g(x)}\,dx \\ \lambda^n(\varphi(A)) &= \int_A \sqrt{\det g(x)}\,dx\,, \end{aligned} \tag{12.15}$$

wobei $A \subset U$ λ^n-messbar ist.

12.16 Beispiel (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$). Betrachte für $U = (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi)$ und $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \geq 0\}$ die Polarkoordinatenabbildung

$$\varphi : U \to V,\ \varphi(r,\theta,\omega) = (r\sin\theta\cos\omega,\ r\sin\theta\sin\omega,\ r\cos\theta)^\top\,.$$



Die Jacobimatrix von φ lautet

$$D\varphi(r,\theta,\omega) = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\omega & r\,\cos\theta\,\cos\omega & -r\,\sin\theta\,\sin\omega \\ \sin\theta\,\sin\omega & r\,\cos\theta\,\sin\omega & r\,\sin\theta\,\cos\omega \\ \cos\theta & -r\,\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Gramsche Matrix ergibt sich

$$\big(g_{ij}(r,\theta,\omega)\big)_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

φ ist diffeomorph, und zwar kann die Umkehrabbildung explizit bestimmt werden. Das Lebesguemaß der Menge $\varphi(E)$ für $E = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\omega_1, \omega_2]$ ist nach dem Transformationssatz und Fubini

$$\lambda^3\big(\varphi(E)\big) = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} r^2 \sin\theta\ d\omega\, d\theta\, dr = \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)(\omega_2 - \omega_1)\,.$$

Sei $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $v : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Darstellung von $v = v(y)$ in den x-Koordinaten ist die Verkettung $u = v \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$, $u(x) = v\big(\varphi(x)\big)$. Zum Beispiel lautet die Polarkoordinatendarstellung einer Funktion $v = v(x, y, z)$

$$u(r, \theta, \omega) = v(r \sin\theta \sin\omega, r \sin\theta \cos\omega, r \cos\theta).$$

In der Physik ist es üblich, die neue Funktion mit demselben Buchstaben zu bezeichnen, da sie nach wie vor dieselbe physikalische Größe repräsentiert. Zum Beispiel kann eine Temperaturverteilung T entweder als Funktion $T = T(x, y, z)$ der Euklidischen Koordinaten oder als Funktion $T = T(r, \theta, \omega)$ der Polarkoordinaten aufgefasst werden. Für unsere Zwecke ist das etwas verwirrend, und wir wollen die Unterscheidung zwischen v und $u = v \circ \varphi$ beibehalten. Für die Darstellung eines Vektorfelds $Y : V \to \mathbb{R}^n$ in den x-Koordinaten muss $Y \circ \varphi$ in der Basis $\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi$ entwickelt werden:

$$Y \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} X_i \, \partial_i\varphi = \sum_{i=1}^{n} X_i \, (D\varphi) e_i = (D\varphi) \, X \,, \tag{12.17}$$

wobei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i$. Das eindeutig bestimmte Vektorfeld $X : U \to \mathbb{R}^n$ mit dieser Eigenschaft lautet

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \big\langle Y \circ \varphi, \partial_i\varphi \big\rangle \, e_j. \tag{12.18}$$

Denn mit der Formel (12.18) für X berechnen wir wegen $\sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik}$

$$\begin{aligned} \big\langle (D\varphi) \, X, \partial_k\varphi \big\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \big\langle Y \circ \varphi, \partial_i\varphi \big\rangle \big\langle \partial_j\varphi, \partial_k\varphi \big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big\langle Y \circ \varphi, \partial_i\varphi \big\rangle \sum_{j=1}^{n} g^{ij} g_{jk} \\ &= \big\langle Y \circ \varphi, \partial_k\varphi \big\rangle. \end{aligned}$$

Da die Vektoren $\partial_k\varphi$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden, folgt $Y \circ \varphi = (D\varphi) \, X$ wie gewünscht. Natürlich ist auch die Formel $X = (D\varphi)^{-1}(Y \circ \varphi)$ richtig, erweist sich aber als weniger praktisch, weil (g^{ij}) oft einfacher zu berechnen ist als $(D\varphi)^{-1}$.

12.19 Satz (Umrechnung von Differentialoperatoren). *Sei φ ein C^1-Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ mit Gramscher Matrix (g_{ij}).*

(i) *Für $v \in C^1(V, \mathbb{R})$ gilt mit $u = v \circ \varphi$*

$$(\operatorname{grad} v) \circ \varphi = (D\varphi) \operatorname{grad}_g u, \qquad \textit{wobei} \ \operatorname{grad}_g u := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \, \partial_i u \, e_j \,.$$

(ii) *Für $Y \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$ gilt mit $Y \circ \varphi = (D\varphi)\, X$*

$$(\operatorname{div} Y) \circ \varphi = \operatorname{div}_g X := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \big(\sqrt{\det g}\, X_j \big) .$$

(iii) *Ist $\varphi \in C^2(U, V)$ und $v \in C^2(V, \mathbb{R})$, so folgt wieder mit $u = v \circ \varphi$*

$$(\Delta v) \circ \varphi = \operatorname{div}_g \operatorname{grad}_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \Big(\sqrt{\det g}\, g^{ij} \partial_j u \Big) =: \Delta_g u .$$

Beweis: Nach der Definition des Gradienten und der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \big\langle (\operatorname{grad} v) \circ \varphi, \partial_i \varphi \big\rangle &= \sum_{j=1}^{n} (\partial_j v) \circ \varphi \, \langle e_j, (D\varphi)\, e_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big((\partial_j v) \circ \varphi \big)\, \partial_i \varphi_j = \partial_i (v \circ \varphi) = \partial_i u . \end{aligned}$$

Also folgt (i) aus Gleichung (12.18), und allgemein gilt für ein Vektorfeld $X : U \to \mathbb{R}^n$

$$\big\langle (D\varphi) \operatorname{grad}_g u, (D\varphi)\, X \big\rangle = \sum_{j=1}^{n} \Big\langle (\operatorname{grad} v) \circ \varphi, \partial_j \varphi \Big\rangle X_j = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j u) X_j . \quad (12.20)$$

Aussage (ii) führen wir durch partielle Integration auf die Umrechnungsformel für den Gradienten zurück. Sei $\psi \in C_0^\infty(V, \mathbb{R})$ beliebig und $\eta := \psi \circ \varphi$. Dann folgt mit partieller Integration (Folgerung 10.22), dem Transformationssatz (Gleichung (12.15)), Behauptung (i), (12.17), (12.20) und der Definition von $\operatorname{div}_g X$

$$\begin{aligned} \int_V \psi \operatorname{div} Y \, dy &= - \int_V \langle \operatorname{grad} \psi, Y \rangle \, dy \\ &= - \int_{\varphi^{-1}(V)} \big\langle (\operatorname{grad} \psi) \circ \varphi, Y \circ \varphi \big\rangle \sqrt{\det g} \, dx \\ &= - \int_{\varphi^{-1}(V)} \big\langle (D\varphi) \operatorname{grad}_g \eta, (D\varphi)\, X \big\rangle \sqrt{\det g} \, dx \\ &= - \int_{\varphi^{-1}(V)} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \eta X_j \sqrt{\det g} \, dx \\ &= \int_{\varphi^{-1}(V)} \eta \operatorname{div}_g X \sqrt{\det g} \, dx \\ &= \int_V \psi \, (\operatorname{div}_g X) \circ \varphi^{-1} \, dy . \end{aligned}$$

Da ψ beliebig ist, folgt $\operatorname{div} Y = (\operatorname{div}_g X) \circ \varphi^{-1}$ und damit Aussage (ii) aus nachfolgendem Lemma 12.21. Schließlich ergibt sich (iii) durch Kombination von (i) und (ii). Aus

$$(\Delta v) \circ \varphi = (\operatorname{div} \operatorname{grad} v) \circ \varphi$$

folgt mit $(\operatorname{grad} v) \circ \varphi = (D\varphi) \operatorname{grad}_g u$, nach (i), und (ii)

$$(\Delta v) \circ \varphi = \operatorname{div}_g \operatorname{grad}_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \Big(\sqrt{\det g}\; g^{ij} \partial_i u \Big) .$$

Wegen und $g^{ji} = g^{ij}$ folgt nun (iii). □

Wir tragen nun das Lemma nach, das im Beweis gebraucht wurde.

12.21 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^0(U)$ mit $\int_U u\varphi\, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Dann ist u die Nullfunktion.*

Beweis: Angenommen es gibt ein $x \in U$ mit $u(x) > 0$. Dann gibt es $\varrho > 0$ und $\delta > 0$ mit $u(x) \geq \delta$ auf $B_\varrho(x) \subset U$. Wähle eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(U)$ mit $\operatorname{spt} \eta \subset B_\varrho(x)$, $\eta \geq 0$ und $\int_U \eta(x)\, dx > 0$. Aus der Monotonie des Integrals folgt

$$0 = \int_U u(x)\eta(x)\, dx \geq \int_U \delta\eta(x)\, dx > 0 ,$$

ein Widerspruch. □

12.22 Beispiel (Laplaceoperator in Polarkoordinaten). Für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$, siehe Beispiel 12.16, ergeben sich folgende Formeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_g u &= \partial_r u\, e^r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta u\, e^\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\, \partial_\omega u\, e^\omega ,\\
\operatorname{div}_g X &= \frac{1}{r^2}\, \partial_r (r^2 X^r) + \frac{1}{\sin\theta}\, \partial_\theta \big((\sin\theta)\, X^\theta \big) + \partial_\omega X^\omega ,\\
\Delta_g u &= \frac{1}{r^2}\, \partial_r \big(r^2 \partial_r u \big) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\, \partial_\theta \big((\sin\theta)\, \partial_\theta u \big) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\, \partial_\omega^2 u .
\end{aligned}$$

Hier bezeichnet e^r, e^θ, e^ω die Standardbasis im (r, θ, ω)-Raum, und X^r, X^θ, X^ω sind die zugehörigen Koordinaten von X. Für die Funktion $v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ ist $u(r) = 1/r$ und somit $\Delta v = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Die Gramsche Matrix $g : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eines Diffeomorphismus $\varphi \in C^1(U, V)$ definiert in jedem Punkt $x \in U$ ein Skalarprodukt und eine zugehörige Euklidische Norm, und zwar gilt

$$g(x)(v, w) = \langle D\varphi(x)v, D\varphi(x)w \rangle \quad \text{und} \quad \|v\|_{g(x)} = \sqrt{g(x)(v, v)} = |D\varphi(x)v| .$$

Ein solches ortsabhängiges Skalarprodukt nennt man eine *Riemannsche Metrik*, genauer spricht man hier von der durch φ *induzierten Metrik*. Mit g kann nicht nur das Maß des Bildes berechnet werden, sondern auch die Bogenlänge von Kurven $\varphi \circ \gamma : [a,b] \to V$:

$$L(\varphi \circ \gamma) = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} \varphi\big(\gamma(t)\big) \right| dt = \int_a^b |D\varphi\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)|\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{g\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t), \gamma'(t)\big)}\, dt\,.$$

Solche ortsabhängigen Skalarprodukte bilden die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

2.13 Das Flächenmaß auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt definieren wir das Flächenmaß für n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+k}$. Dazu wird zunächst der Flächeninhalt für Immersionen ad hoc definiert und dann mittels lokaler Parameterdarstellungen auf Untermannigfaltigkeiten übertragen. Als Anwendung erhalten wir die sogenannte Zwiebelformel.

Zur Definition des Flächeninhalts muss zunächst geklärt werden, was unter einer Fläche zu verstehen ist. Am einfachsten ist der Begriff der parametrisierten Fläche oder Immersion. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$, $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$, heißt *Immersion*, wenn für alle $x \in U$

$$\operatorname{rang} Df(x) = n \qquad \text{bzw. äquivalent} \qquad \ker Df(x) = \{0\}\,.$$

Die Vektoren $\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)$ bilden dann eine Basis des Unterraums $\operatorname{Bild} Df(x) \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Die Zahl n heißt Dimension, die Zahl k Kodimension von f. Wir definieren analog zu (12.13) im vorigen Abschnitt die *Gramsche Matrix* oder *induzierte Metrik*

$$g(x) = Df(x)^\top Df(x) \qquad \text{bzw.} \qquad g_{ij}(x) = \big\langle \partial_i f(x), \partial_j f(x) \big\rangle\,, \quad i,j = 1, \ldots, n\,.$$

Offenbar ist (g_{ij}) für eine beliebige Abbildung $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ definiert und positiv semidefinit. Die Matrix ist genau dann strikt positiv definit und damit invertierbar, wenn f eine Immersion ist, denn es gilt $\langle g(x)v, v\rangle = |Df(x)v|^2$, also $\ker g(x) = \ker Df(x)$. Wegen (12.15) ist es naheliegend, den Flächeninhalt wie folgt zu definieren.

13.1 Definition. *Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ eine n-dimensionale Immersion mit induzierter Metrik g, und $E \subset U$ sei λ^n-messbar. Der (n-dimensionale)* Flächeninhalt *von f auf E ist definiert durch*

$$A_E(f) = \int_E Jf\, d\lambda^n\,,$$

wobei $Jf = \sqrt{\det g}$. Die Funktion Jf heißt Flächenintegrand *oder* Jacobische *von f.*

Als geometrische Größe sollte der Flächeninhalt nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängen. Dies wollen wir sofort überprüfen.

13.2 Satz (Invarianz des Flächeninhalts). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $\varphi \in C^1(U,V)$ ein Diffeomorphismus und $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n+k})$ eine Immersion. Dann gilt für jede λ^n-messbare Menge $E \subset U$*

$$A_{\varphi(E)}(f) = A_E(f \circ \varphi)\,.$$

Beweis: Seien g bzw. h die induzierten Metriken von $f \circ \varphi$ bzw. f. Es gilt

$$D(f\circ\varphi)^\top(x)\,D(f\circ\varphi)(x) = \,D\varphi(x)^\top\,Df(\varphi(x))^\top Df(\varphi(x))\,D\varphi(x)\,,$$

beziehungsweise

$$g(x) = \,D\varphi(x)^\top\,h(\varphi(x))\,D\varphi(x)\,.$$

Mit den Rechenregeln für die Determinante ergibt sich

$$J(f\circ\varphi) = (Jf)\circ\varphi\,|\det D\varphi|\,.$$

Die Behauptung folgt damit aus dem Transformationssatz (Satz 12.4). □

Wir wollen nun einige Spezialfälle betrachten.

13.3 Beispiel. Eine eindimensionale Immersion $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}^{1+k}$ heißt auch *reguläre Kurve*. Nach Definition 13.1 ist ihre Länge $L(f)$ gegeben durch

$$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

Analog zu Beispiel 13.5 wird hier die Länge des Bildes ebenfalls mit der Vielfachheit gezählt, mit der es durchlaufen wird. Zum Beispiel ist $L_{(0,3\pi)}(f) = 3\pi$ für $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

13.4 Beispiel. Eine zweidimensionale Immersion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f = f(x,y)$, heißt auch *reguläre Fläche*. Es gilt, wenn $\wedge$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet,

$$Jf = \sqrt{|\partial_x f|^2\,|\partial_y f|^2 - \langle \partial_x f, \partial_y f\rangle^2} = |\partial_x f \wedge \partial_y f|\;.$$

Betrachte zum Beispiel Polarkoordinaten auf der Sphäre, d.h.

$$f : U = (0,\pi)\times(0,2\pi) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,\; f(\theta,\omega) = (\sin\theta\cos\omega, \sin\theta\sin\omega, \cos\theta)^\top\,.$$

Es gilt $\partial_\theta f \wedge \partial_\omega f(\theta,\omega) = (\sin\theta)\,f(\theta,\omega) \neq 0$ für alle $(\theta,\omega) \in U$. Also ist f eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$, mit Flächeninhalt

$$A(f) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\omega\,d\theta = 4\pi\,.$$

13.5 Beispiel. Für $k = 0$, also $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sprechen wir statt vom n-dimensionalen Flächeninhalt vom Volumen $\mathrm{vol}_E(f)$. Die Abbildung f ist genau dann eine Immersion, wenn $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, das heißt f ist lokal diffeomorph. Es gilt $Jf = \sqrt{\det(Df^\top Df)} = |\det Df|$. Ist zusätzlich $f : U \to f(U)$ injektiv und damit diffeomorph, so besagt der Transformationssatz

$$\lambda^n(f(E)) = \int_E |\det Df| \, d\lambda^n = \mathrm{vol}_E(f).$$

Im allgemeinen ist $\mathrm{vol}_E(f)$ nicht das λ^n-Maß des Bildes $f(E)$, sondern die Bildpunkte werden mit der Vielfachheit gezählt, mit der sie angenommen werden.

13.6 Beispiel. Für $u \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ ist die Graphenabbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^{n+k}, \; f(x) = (x, u(x)) ,$$

eine n-dimensionale Immersion. Denn aus $\partial_i f = (e_i, \partial_i u)$, $i = 1, \ldots, n$, folgt sofort, dass $Df(x)$ injektiv ist. Man berechnet

$$\langle \partial_i f, \partial_j f \rangle = \big\langle (e_i, \partial_i u), (e_j, \partial_j u) \big\rangle = \delta_{ij} + \langle \partial_i u, \partial_j u \rangle.$$

Also folgt für den Flächeninhalt von f

$$A(f) = \int_U \sqrt{\det\big(E_n + Du^\top Du\big)} \, d\lambda^n.$$

In Kodimension $k = 1$, also u reellwertig, gibt es zu $x \in U$ eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ mit $Du(x)v_1 = |Du(x)|$ und $Du(x)v_j = 0$ für $j \geq 2$. Das ist trivial im Fall $Du(x) = 0$, für $Du(x) \neq 0$ wähle $v_1 = Du(x)/|Du(x)|$ und ergänze zu einer Orthonormalbasis. Es folgt

$$\begin{aligned} \big\langle \big(E_n + Du(x)^\top Du(x)\big) v_i, v_j \big\rangle &= \delta_{ij} + (Du(x)v_i)\,(Du(x)v_j) \\ &= \begin{cases} 1 + |Du(x)|^2 & \text{für } i = j = 1, \\ \delta_{ij} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ergibt für einen Graphen der Kodimension Eins die klassische Formel

$$A(f) = \int_U \sqrt{1 + |Du(x)|^2} \, dx \tag{13.7}$$

für $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $f(x) = (x, u(x))$.

Wir wollen nun einen globaleren Standpunkt einnehmen und Flächen betrachten, die nicht bzw. nicht a priori durch eine einzige Parametrisierung gegeben sind. Unser Ziel ist es, auf diesen Flächen – genauer: Untermannigfaltigkeiten – ein n-dimensionales Flächenmaß zu definieren.

13.8 Satz (Untermannigfaltigkeitskriterien). *Sei* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Für* $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Plättbarkeitskriterium: *Zu jedem* $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *und einen* C^1*-Diffeomorphismus* $\varphi : W \to \varphi(W) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *mit*
$$\varphi(M \cap W) = \{z \in \varphi(W) \,\big|\, z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}\,.$$

(ii) Niveaumengenkriterium: *Zu jedem* $p \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *und eine Funktion* $h \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$ *mit* $\operatorname{rang} Dh(q) = k$ *für alle* $q \in W$, *so dass*
$$M \cap W = \{q \in W \,\big|\, h(q) = 0\}\,.$$

(iii) Graphenkriterium: *Zu jedem* $p \in M$ *gibt es eine Euklidische Bewegung* B *des* $\mathbb{R}^{n+k}$ *mit* $B(0) = p$, *offene Mengen* $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ *mit* $0 \in U \times V$ *und eine* C^1*-Funktion* $u : U \to V$ *mit* $u(0) = 0$, *so dass*
$$M \cap B(U \times V) = B\big(\{(x, u(x)) \,\big|\, x \in U\}\big)\,.$$

Beweis: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Sei zu $p \in M$ ein Diffeomorphismus $\varphi : W \to \varphi(W)$ wie in (i) gewählt. Dann ist $D\varphi(q) \in \mathrm{GL}_{n+k}(\mathbb{R})$ für alle $q \in W$. Setze $h = \pi^\perp \circ \varphi : W \to \mathbb{R}^k$, wobei $\pi^\perp : \mathbb{R}^{n+k} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Orthogonalprojektion bezeichnet. Mit der Kettenregel folgt $\big(Dh(q)\big)_{ij} = \partial_i \varphi_{n+j}$, $i = 1, \ldots, n+k$, $j = 1, \ldots, k$, und somit $\operatorname{rang} Dh(q) = k$ für alle $q \in W$. Weiter haben wir
$$\begin{aligned}\{q \in W \,\big|\, h(q) = 0\} &= \{q \in W \,\big|\, \varphi_{n+1}(q) = \ldots = \varphi_{n+k}(q) = 0\}\\ &= \varphi^{-1}\big(\{z \in \varphi(W) \,\big|\, z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}\big)\\ &= M \cap W.\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Als nächstes gelte die Niveaumengenbeschreibung, das heißt wir können zu $p \in M$ eine Funktion $h \in C^1(W, \mathbb{R}^k)$ wie in (ii) wählen. Wir nehmen zunächst an, dass die Vektoren $\partial_{n+1} h(p), \ldots, \partial_{n+k} h(p)$ linear unabhängig sind; außerdem sei $p = 0$. Nach dem Satz über impliziten Funktionen gibt es dann offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine C^1-Funktion $u : U \to V$, so dass gilt:
$$M \cap (U \times V) = \{(x, u(x) \,\big|\, x \in U\}\,.$$
Damit gilt (iii) mit $B = \mathrm{id}$. Allgemein existiert wegen $\operatorname{rang} Dh(p) = k$ eine Permutation $\sigma \in \mathrm{P}_{n+k}$, so dass die Vektoren $\partial_{\sigma(j)} h(p)$ für $j = n{+}1, \ldots, n+k$ linear unabhängig sind. Setze dann $B(z) = p + Sz$, wobei $Se_j = e_{\sigma(j)}$ für $j = 1, \ldots, n+k$, und betrachte $\widetilde{M} = B^{-1}(M)$ und $\widetilde{h} = h \circ B$. Wegen $\partial_j \widetilde{h}(0) = Dh(p) Se_j = \partial_{\sigma(j)} h(p)$ können wir das obige Argument anwenden und erhalten $u : U \to V$ wie verlangt mit $\widetilde{M} \cap (U \times V) = \{(x, u(x)) \,\big|\, x \in U\}$, also
$$M \cap B(U \times V) = B\big(\{(x, u(x)) \,\big|\, x \in U\}\big)\,.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei schließlich zu $p \in M$ eine Graphendarstellung wie in (iii) gegeben, zunächst mit $p = 0$ und $B = \mathrm{id}$. Betrachte dann die Injektion $\varphi : U \times V \to \varphi(U \times V)$, $\varphi(x, y) = (x, y - u(x))$. Es gilt

$$D\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ -Du(x) & E_k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+k}(\mathbb{R})\,.$$

Somit ist φ ein Diffeomorphismus auf sein Bild, und es folgt aus (iii)

$$\begin{aligned} \varphi(M \cap (U \times V)) &= \varphi(\{(x, u(x)) \,\big|\, x \in U\}) \\ &= \{z \in \varphi(U \times V) \,\big|\, z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}\,. \end{aligned}$$

Sind p, B beliebig, also $B(z) = p + Sz$ mit $S \in \mathbb{O}(n+k)$, so wenden wir das obige Argument an auf $\widetilde{M} = B^{-1}(M)$ und erhalten den entsprechenden Diffeomorphismus $\widetilde{\varphi} : U \times V \to \widetilde{\varphi}(U \times V)$. Mit $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ B^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi\big(M \cap B(U \times V)\big) &= \widetilde{\varphi}(\widetilde{M} \cap (U \times V)) \\ &= \{z \in \widetilde{\varphi}(U \times V) \,\big|\, z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\} \\ &= \{z \in \varphi(B(U \times V)) \,\big|\, z_{n+1} = \ldots = z_{n+k} = 0\}\,. \end{aligned}$$

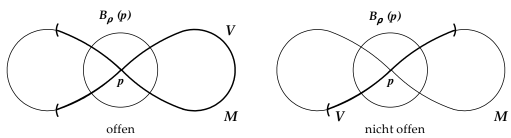
Somit folgt (i) für $W = B(U \times V)$. □

13.9 Definition (Untermannigfaltigkeit). *Sei $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ heißt* n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$, *falls eines (und damit jedes) der drei Kriterien aus Satz 13.8 erfüllt ist.*

13.10 Beispiel. Die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, |p| = 1\}$ ist eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ der Dimension n, denn für jedes $p \in \mathbb{S}^n$ können wir im Niveaumengenkriterium $W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und $h(q) = |q|^2 - 1$ wählen:

$$Dh(q) = 2q \neq 0 \text{ auf } W \quad \text{ und } \quad \mathbb{S}^n \cap W = \mathbb{S}^n = \{q \in W \,\big|\, h(q) = 0\}\,.$$

Wir brauchen nun einige topologische Tatsachen. Jede Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist, versehen mit dem üblichen Euklidischen Abstand $d(p,q) = |p - q|$ für $p, q \in M$, ein metrischer Raum. Damit ist der Begriff der offenen Menge in M erklärt: $V \subset M$ heißt *offen in M* (oder *offen bzgl. der Relativtopologie von M*), wenn es zu jedem $p \in V$ ein $\varrho > 0$ gibt mit $M \cap B_\varrho(p) \subset V$. Analog wird *abgeschlossen in M* und *kompakt in M* definiert.



13.11 Lemma (zur Relativtopologie). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$.*

(i) *Eine Menge $V \subset M$ ist genau dann offen in M, wenn es eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gibt mit $V = M \cap W$.*

(ii) *Eine Menge $K \subset M$ ist genau dann kompakt in M, wenn K kompakt in $\mathbb{R}^{n+k}$ ist.*

Beweis: Sei $V \subset M$ offen in M. Dann gibt es zu jedem $p \in V$ ein $\varrho(p) > 0$ mit $M \cap B_{\varrho(p)} \subset V$. Die Menge $W = \bigcup_{p\in V} B_{\varrho(p)}(p)$ ist offen in $\mathbb{R}^{n+k}$ und es gilt

$$M \cap W = \bigcup_{p\in V} M \cap B_{\varrho(p)}(p) = V.$$

Ist umgekehrt die offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gegeben, so wähle zu $p \in V = M \cap W$ ein $\varrho > 0$ mit $B_\varrho(p) \subset W$, und erhalte $M \cap B_\varrho(p) \subset M \cap W = V$. Aussage (ii) folgt mit (i) aus der Definition der Überdeckungskompaktheit. Alternativ kann man direkt mit der äquivalenten Folgenkompaktheit argumentieren. □

13.12 Satz (σ-Kompaktheit von Untermannigfaltigkeiten). *Jede n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist als abzählbare Vereinigung $M = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$ von kompakten Mengen darstellbar.*

Beweis: Zuerst konstruieren wir eine abzählbare, dichte Menge $P \subset M$. Betrachte die Würfel $Q_{j,k} = 2^{-k}(j + [0,1]^{n+k})$ mit $j \in \mathbb{Z}^{n+k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, und wähle beliebige Punkte $p_{j,k} \in M \cap Q_{j,k}$, sofern dieser Schnitt nichtleer ist. Da jedes $p \in M$ in Würfeln $Q_{j,k}$ mit beliebig kleiner Kantenlänge liegt, ist die Menge P aller $p_{j,k}$ dicht in M. Als nächstes zeigen wir: ist $\varphi : W \to \varphi(W)$ Plättung bei p und $\overline{B_r(p)} \subset W$, so ist $M \cap \overline{B_r(p)}$ kompakt. Denn es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(M \cap \overline{B_r(p)}) &= \varphi(M \cap W) \cap \varphi\big(\overline{B_r(p)}\big)\\ &= \mathbb{R}^n \cap \varphi(W) \cap \varphi\big(\overline{B_r(p)}\big) = \mathbb{R}^n \cap \varphi\big(\overline{B_r(p)}\big)\,.\end{aligned}$$

Diese Menge ist kompakt, denn das Bild von $\overline{B_r(p)}$ unter der stetigen Abbildung φ ist kompakt, und $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+k}$. Damit ist auch $M \cap \overline{B_r(p)} = \varphi^{-1}\big(\mathbb{R}^n \cap \varphi\big(\overline{B_r(p)}\big)$ kompakt, was zu zeigen war. Wir definieren nun für jedes $p \in M$

$$r(p) = \sup\{r > 0 \,\big|\, M \cap \overline{B_r(p)} \text{ ist kompakt}\} \in (0,\infty]\,.$$

Wäre $r(q) + |p-q| < r(p)$, so können wir $r > r(q)$ und $s < r(p)$ wählen mit $r + |p-q| < s$ und $M \cap \overline{B_s(p)}$ kompakt. Es folgt $\overline{B_r(q)} \subset \overline{B_s(p)}$ und weiter

$$M \cap \overline{B_r(q)} = \big(M \cap \overline{B_s(p)}\big) \cap \overline{B_r(q)}.$$

Aber die rechte Seite ist kompakt im Widerspruch zu $r > r(q)$. Konvergiert also eine Folge $p_i \in M$ gegen $p \in M$, so folgt $p \in M \cap \overline{B_{r(p_i)/2}(p_i)}$ für i hinreichend groß, denn anderenfalls

$$|p - p_i| > \frac{r(p_i)}{2} \geq \frac{1}{2}\big(r(p) - |p - p_i|\big) \quad \Rightarrow \quad 3|p - p_i| > r(p)\,,$$

was ein Widerspruch zu $p_i \to p$ ist. Somit ist M Vereinigung der abzählbar vielen, kompakten Mengen $K(p) = M \cap \overline{B_{r(p)/2}(p)}$ mit $p \in P$. $\square$

13.13 Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit. Eine* lokale Parametrisierung von M *ist eine injektive C^1-Immersion*

$$f : U \to M \subset \mathbb{R}^{n+k}\,,$$

wobei U offen in $\mathbb{R}^n$.

Wir beabsichtigen, die Untermannigfaltigkeit M durch Bildgebiete von Parametrisierungen zu überdecken und das Maß in jedem einzelnen Bildgebiet mit der Flächenformel zu berechnen.

13.14 Satz (Eigenschaften lokaler Parametrisierungen). *Für jede n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ gilt:*

(i) *Ist $f : U \to M$ eine lokale Parametrisierung von M, so ist $V = f(U)$ offen in M und $f^{-1} : V \to U$ ist stetig, also $f : U \to V$ homeomorph.*

(ii) *Für lokale Parametrisierungen $f_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, ist der Parameterwechsel $f_2^{-1} \circ f_1 : f_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to f_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

Beweis: Wir zeigen (i) zunächst unter der Annahme $V \subset W$, wobei $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $\varphi(M \cap W) = \mathbb{R}^n \cap \varphi(W)$ für einen C^1-Diffeomorphismus $\varphi : W \to \varphi(W)$. Dann ist die Abbildung $\varphi \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ definiert, injektiv und es gilt für alle $x \in U$

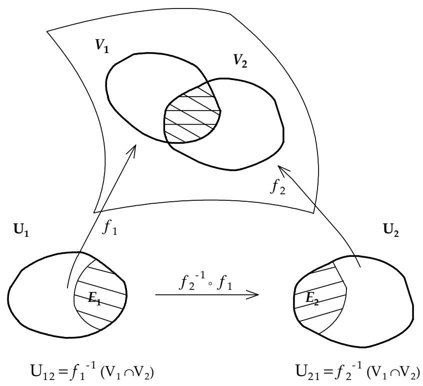
$$\operatorname{rang} D(\varphi \circ f)(x) = \operatorname{rang}\big(D\varphi(f(x))\, Df(x)\big) = n\,.$$

Also folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion, dass $Y = (\varphi \circ f)(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, und somit $\varphi \circ f : U \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Folglich ist $Z = (Y \times \mathbb{R}^k) \cap \varphi(W)$ offen in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $\mathbb{R}^n \cap Z = Y$. Wegen $V = \varphi^{-1}(Y)$ folgt

$$V = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n \cap Z) = \varphi^{-1}\big(\mathbb{R}^n \cap \varphi(W)\big) \cap \varphi^{-1}(Z) = M \cap \varphi^{-1}(Z)\,,$$

wobei zuletzt $\mathbb{R}^n \cap \varphi(W) = \varphi(M \cap W)$ benutzt wurde. Somit ist V relativ offen in M nach Lemma 13.11, und $f^{-1} = (\varphi \circ f)^{-1}\, \varphi|_V$ ist stetig. Für V beliebig wählen wir zu $p \in V$ eine Plättung $\varphi : W \to \varphi(W)$ mit $p \in W$ wie in Satz 13.8 (i), und wenden das obige Argument an auf $\widetilde{U} = U \cap \varphi^{-1}(W)$ sowie $\widetilde{f} = f|_{\widetilde{U}}$. Dann ist $\widetilde{V} = f(\widetilde{U})$ offen in M mit $p \in \widetilde{V}$, und $f^{-1}|_{\widetilde{V}} = (f|_{\widetilde{U}})^{-1}$ ist auf $\widetilde{V}$ stetig.

Für (ii) können wir ebenfalls annehmen, dass $V_i \subset W$ für $i = 1, 2$, wobei $\varphi : W \to \varphi(W)$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(M \cap W) = \mathbb{R}^n \cap \varphi(W)$ ist.



Dann sind die Abbildungen

$$\varphi \circ f_i : f_i^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \varphi(V_1 \cap V_2)$$

diffeomorph, also auch $f_2^{-1} \circ f_1 = (\varphi \circ f_2)^{-1} \circ (\varphi \circ f_1)$. □

13.15 Folgerung (Existenz eines abzählbaren Atlas). *Jede C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ besitzt einen* abzählbaren Atlas, *d.h. ein System von lokalen Parametrisierungen $f_i : U_i \to M$, $i \in \mathbb{N}$, mit $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(U_i)$.*

Beweis: Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $f : U \to V$ mit $p \in V$, zum Beispiel können wir $f = \varphi^{-1}|_{\varphi(W)\cap\mathbb{R}^n}$ wählen, wobei $\varphi : W \to \varphi(W)$ eine lokale Plättung wie in Satz 13.8 (i) ist. Da ein Kartengebiet $V = f(U)$ offen ist nach Satz 13.14 (i), wird jede kompakte Menge $K \subset M$ durch endlich viele Kartengebiete überdeckt. Die Behauptung folgt mit Satz 13.12. □

13.16 Definition. *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ heißt* Tangentialvektor von $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ in p, *wenn es eine Abbildung $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.*

13.17 Folgerung (Existenz des Tangentialraums). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann ist die Menge aller Tangentialvektoren von M in p ein n-dimensionaler Unterraum, der* Tangentialraum T_pM.

Beweis: Sei $M \cap W = \{q \in W : h(q) = 0\}$ eine Niveaumengenbeschreibung auf einer Umgebung W von p nach Satz 13.8 (2). Ist $v \in \mathbb{R}^{n+k}$ Tangentialvektor in p und γ wie in Definition 13.16, so folgt $h(\gamma(t)) = 0$ nahe bei $t = 0$, also

$$0 = \frac{d}{dt} h(\gamma(t))|_{t=0} = Dh(\gamma(0))\gamma'(0) = Dh(p)v\,.$$

Somit liegt v im n-dimensionalen Unterraum $\ker Dh(p)$. Ist andererseits $f : U \to M$ eine lokale Parametrisierung mit $f(x_0) = p$, so folgt

$$Df(x_0)e_i = \frac{d}{dt} f(x_0 + te_i)|_{t=0} \in T_pM \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n\,.$$

Aus Dimensionsgründen muss Bild $Df(x_0) = T_pM = \ker Dh(p)$ gelten. $\square$

13.18 Satz (Definition des Oberflächenmaßes). *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, und sei $\mathcal{E}$ das System aller Mengen $E \subset M$, für die gilt:*

für jede lokale Parametrisierung $f : U \to M$ ist $f^{-1}\big(E \cap f(U)\big) \in \mathcal{M}(\lambda^n)$.

Dann gibt es genau ein reguläres äußeres Maß ω auf M mit folgenden Eigenschaften:

(i) *Das System der ω-messbaren Mengen ist $\mathcal{E}$, welches die Borelmengen in M enthält.*

(ii) *Ist $f : U \to M$ lokale Parametrisierung und $E \in \mathcal{E}$ mit $E \subset f(U)$, so gilt*

$$\omega(E) = \int_{f^{-1}(E)} Jf\, d\lambda^n\,.$$

Man nennt ω das Flächemaß *auf M.*

Beweis: Das System $\mathcal{E}$ enthält alle offenen Mengen $W \subset M$, denn für eine lokale Parametrisierung $f : U \to M$ ist $f(U)$ offen in M nach Satz 13.14 (i), also ist auch $f^{-1}\big(W \cap f(U)\big)$ offen und damit λ^n-messbar nach Satz 6.7. Weiter gilt

$$f^{-1}\big((M \setminus E) \cap f(U)\big) = U \setminus f^{-1}\big(E \cap f(U)\big)\,,$$
$$f^{-1}\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \cap f(U)\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\big(E_i \cap f(U)\big)\,.$$

Also ist $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra, die die Borelmengen enthält. Wähle nun mit Folgerung 13.15 ein System von lokalen Parametrisierungen $f_i : U_i \to M$, $i \in \mathbb{N}$, mit $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, wobei $V_i := f(U_i)$. Die Mengen $M_i = V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \in \mathcal{E}$ sind dann paarweise disjunkt.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von ω. Ist ω ein äußeres Maß mit den verlangten Eigenschaften, so folgt für $E \in \mathcal{E}$

$$\omega(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(E \cap M_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E \cap M_i)} Jf_i\, d\lambda^n. \tag{13.19}$$

Da ω regulär ist, gilt $\omega(S) = \inf_{E \in \mathcal{E},\, E \supset S} \omega(E)$ für jede Menge $S \subset M$, also ist das äußere Maß ω eindeutig bestimmt, da die rechte Seite in (13.19) unabhängig von ω ist.

Für den Beweis der Existenz von ω zeigen wir, dass durch (13.19) ein Prämaß auf $\mathcal{E}$ gegeben ist: sind $E_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{E}$, so folgt

$$\omega(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E\cap M_i)} Jf_i \, d\lambda^n = \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E_j\cap M_i)} Jf_i \, d\lambda^n = \sum_{j=1}^{\infty} \omega(E_j) \, .$$

Mit Satz 4.6 erhalten wir die Caratheodory-Fortsetzung, die wir ebenfalls mit ω bezeichnen. Alle Mengen in $\mathcal{E}$ sind ω-messbar.

Um (ii) zu zeigen betrachte eine lokale Parametrisierung $f : U \to M$ und $E \in \mathcal{E}$ mit $E \subset f(U) =: V$. Nach Satz 13.14 (ii) ist dann $\varphi_i = f_i^{-1} \circ f : f^{-1}(V \cap V_i) \to f_i^{-1}(V \cap V_i)$ ein C^1-Diffeomorphismus, und aus Satz 13.2 folgt

$$\begin{aligned}
\omega(E) &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(E\cap M_i)} Jf_i \, d\lambda^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_i(f^{-1}(E\cap M_i))} Jf_i \, d\lambda^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f^{-1}(E\cap M_i)} J(f_i \circ \varphi_i) \, d\lambda^n \\
&= \int_{f^{-1}(E)} Jf \, d\lambda^n \, .
\end{aligned}$$

Somit ist (ii) bewiesen und es bleibt, die σ-Algebra der ω-messbaren Mengen zu bestimmen. Für $K \subset U_i$ kompakt gilt $\omega(f_i(K)) = \int_K Jf_i \, d\lambda^n < \infty$. Da sich jede Menge U_i durch abzählbar viele kompakte Mengen ausschöpfen lässt, ist ω ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{E}$. Nach Folgerung 4.11 gibt es dann zu jeder ω-messbaren Menge $D \subset M$ Mengen $C, E \in \mathcal{E}$ mit $C \subset D \subset E$ und $\omega(E \setminus C) = 0$. Es folgt für eine lokale Parametrisierung $f : U \to V$

$$0 = \omega((E \setminus C) \cap V) = \int_{f^{-1}((E\setminus C)\cap V)} Jf \, d\lambda^n \, .$$

Da $Jf > 0$ ist $f^{-1}\big((E \setminus C) \cap V\big)$ eine λ^n-Nullmenge. Dann ist aber auch $f^{-1}\big((D \setminus C) \cap V\big)$ eine λ^n-Nullmenge, insbesondere λ^n-messbar. Wegen $f^{-1}(D \cap V) = f^{-1}(C \cap V) \cup f^{-1}\big((D \setminus C) \cap V\big)$ folgt $D \in \mathcal{E}$. □

13.20 Bemerkung. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $u \colon M \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion bzgl. des Oberflächenmaßes ω. Ist $f : U \to V$ lokale Parametrisierung, so gilt

$$\int_V u \, d\omega = \int_{f^{-1}(V)} u \circ f \, Jf \, d\lambda^n. \tag{13.21}$$

Die Formel gilt offensichtlich für charakteristische Funktionen $u = \chi_B$ mit $B \subset V$ ω-messbar. Durch Approximation mit Treppenfunktionen von unten (Satz 7.2), ergibt sich (13.21) dann für $u \geq 0$, und schließlich durch Zerlegung in u^+ und u^- für beliebige ω-integrierbare u. Eine globale Formel ergibt sich analog zu (13.19), d.h. mit $M_i = V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$ gilt

$$\int_M u \, d\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f_i^{-1}(M_i)} u \circ f_i \, Jf_i \, d\lambda^n .$$

Im allgemeinen werden nicht unendlich viele Parametrisierungen benötigt, um ein Flächenintegral auszurechnen. Man kann sogar zeigen, dass jede kompakte Untermannigfaltigkeit bis auf eine ω-Nullmenge durch eine einzige Parametrisierung erfasst werden kann, was aber eher von theoretischem Interesse ist.

Die gegebene Definition des Flächenmaßes ist gut geeignet, um auf einer festen Untermannigfaltigkeit M das Maß von Teilmengen bzw. Integrale von Funktionen zu berechnen. Dagegen ist die Konstruktion unpraktisch, wenn Aussagen über Folgen von Untermannigfaltigkeiten benötigt werden. Es kann auf $\mathbb{R}^{n+k}$ ein äußeres Maß $\mathcal{H}^n$ definiert werden, das *n-dimensionale Hausdorffmaß*, so dass die Einschränkung auf jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M das jeweilige Flächenmaß ω_M ergibt. Die Flächenformel ergibt sich bei diesem Zugang als Satz. Wir sind hier von der Flächenformel als Definition ausgegangen, um sofort Beispiele von Flächeninhalten ausrechnen zu können.

13.22 Lemma (Transformation des Flächeninhalts). *Sei $\varphi : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Ähnlichkeitsabbildung, d.h. es gibt $\lambda > 0$, $T \in \mathbb{O}(n+k)$ und $a \in \mathbb{R}^{n+k}$ so, dass $\varphi(x) = \lambda T(x+a)$. Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit, so ist $N = \varphi(M)$ auch eine C^1-Untermannigfaltigkeit, und für die zugehörigen Flächenmaße ω_M bzw. ω_N gilt:*

(i) $\omega_N(\varphi(A)) = \lambda^n \, \omega_M(A)$ *für alle ω_M-messbaren $A \subset M$,*

(ii) $\int_N u \, d\omega_N = \lambda^n \int_M u \circ \varphi \; d\omega_M$*, falls u ω_N-messbar ist und eines der Integrale existiert.*

Beweis: Es ist leicht zu sehen, dass N eine C^1-Untermannigfaltigkeit ist. Ist $f : U \to V$ lokale Parametrisierung von M, so ist $\varphi \circ f : U \to \varphi(V)$ lokale Parametrisierung von N und für $A \subset M$ gilt

$$(\varphi \circ f)^{-1}(\varphi(A) \cap \varphi(V)) = f^{-1}(A \cap V) .$$

Nach Satz 13.18 ist also $A \subset M$ genau dann ω_M-messbar, wenn $\varphi(A)$ ω_N-messbar ist. Zum Beweis von (i) können wir mittels Zerlegung wie in (13.19) annehmen, dass $A \subset V$ für eine lokale Parametrisierung $f : U \to V$. Es gilt

$$\begin{aligned} D(\varphi \circ f)^\top(x) \, D(\varphi \circ f)(x) &= Df^\top(x) \, D\varphi^\top(f(x)) \, D\varphi(f(x)) \, Df(x) \\ &= \lambda^2 \, Df^\top(x) Df(x) . \end{aligned}$$

Mit Satz 13.18 folgt

$$\omega_N(\varphi(A)) = \int_{(\varphi\circ f)^{-1}(\varphi(A))} J(\varphi \circ f)\, d\lambda^n = \lambda^n \int_{f^{-1}(A)} Jf\, d\lambda^n = \lambda^n\, \omega_M(A)\,.$$

Für $u = \chi_B$ mit $B \subset N$ ω_N-messbar folgt (ii) aus (i). Durch Approximation mit Treppenfunktionen von unten (Satz 7.2) ergibt sich (ii) dann für $u \geq 0$, und schließlich durch Zerlegung in u^+ und u^- für beliebige ω_N-messbare u. □

13.23 Satz (Zwiebelformel). *Sei ω_r das Oberflächenmaß auf $\partial B_r = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, |p| = r\}$. Für $u \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ ist $u|_{\partial B_r} \in L^1(\omega_r)$ für λ^1-fast-alle $r > 0$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u\, d\lambda^{n+1} = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} u(p)\, d\omega_r(p)\, dr = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^n} r^n u(r\xi)\, d\omega(\xi)\, dr\,.$$

Beweis: Sei $f: U \to V \subset \mathbb{S}^n$ eine lokale Parametrisierung, und $C(V) = \{r\xi \,\big|\, \xi \in V,\, r > 0\}$ der Kegel über V. Betrachte den Diffeomorphismus $\varphi: (0,\infty) \times U \to C(V)$, $\varphi(r,x) = rf(x)$, mit induzierter Metrik

$$D\varphi^\top(r,x)\, D\varphi(r,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 g(x) \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } g_{ij} = \langle \partial_i f, \partial_j f\rangle \text{ für } 1 \leq i,j \leq n\,.$$

Ist $E = f(A)$ für λ^n-messbares $A \subset U$ und $C(E)$ der Kegel über E, so folgt aus dem Transformationssatz, dem Satz von Fubini und der Definition des Oberflächenintegrals

$$\begin{aligned}
\int_{C(E)} u\, d\lambda^{n+1} &= \int_{(0,\infty)\times A} u\big(rf(x)\big)\, r^n \sqrt{\det g(x)}\, d\lambda^{n+1}(r,x) \\
&= \int_0^\infty r^n \int_A u\big(rf(x)\big) \sqrt{\det g(x)}\, dx\, dr \\
&= \int_0^\infty r^n \int_E u(r\xi)\, d\omega(\xi)\, dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\{r\xi \,|\, \xi \in E\}} u(p)\, d\omega_r(p)\, dr\,,
\end{aligned}$$

wobei zuletzt Lemma 13.22 benutzt wurde. Wähle nun eine Zerlegung $\mathbb{S}^n = \bigcup_{j=1}^N E_j$ mit $E_j \subset V_j$, wobei $f_j : U_j \to V_j$ lokale Parametrisierung. Durch Addition folgt die Behauptung. □

13.24 Beispiel. Mit $u = \chi_{B_1(0)}$ folgt für den Flächeninhalt ω_n der n-dimensionalen Sphäre

$$\alpha_{n+1} = \lambda^{n+1}(B_1(0)) = \int_0^1 \omega_r(\partial B_r)\, dr = \int_0^1 \omega_n r^n\, dr = \frac{\omega_n}{n+1},$$

also zum Beispiel $\omega_1 = 2\pi,\ \omega_2 = 4\pi$ und $\omega_3 = 2\pi^2$, vgl. Beispiel 10.17.

2.14 Der Integralsatz von Gauß

In diesem Abschnitt beweisen wir den Integralsatz von Gauß, die mehrdimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Aussage des Satzes ist, unter geeigneten technischen Voraussetzungen, die Formel

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\omega \,.$$

Dabei ist X ein Vektorfeld und ν die äußere Einheitsnormale auf dem Rand des Gebiets Ω im $\mathbb{R}^n$.

Zuerst behandeln wir heuristisch den einfachen Fall, dass das zugrundeliegende Gebiet ein n-dimensionaler Quader Q ist, das heißt $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Die äußere Einheitsnormale sollte außerhalb der niederdimensionalen Kanten wie folgt gegeben sein:

$$\nu(x) = \begin{cases} -e_i & \text{für } x \in \partial Q \text{ mit } x_i = a_i \\ e_i & \text{für } x \in \partial Q \text{ mit } x_i = b_i. \end{cases}$$

Wir setzen $Q_i = (a_1, b_1) \times \ldots \times \widehat{(a_i, b_i)} \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, wobei das Dach bedeutet, dass der Term wegzulassen ist. Für ein hinreichend glattes Vektorfeld $X : \overline{Q} \to \mathbb{R}^n$ berechnen wir dann mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{div} X \, d\lambda^n &= \sum_{i=1}^n \int_Q \partial_i X_i \, d\lambda^n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} \int_{a_i}^{b_i} \partial_i X_i(x) \, dx_i \; dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} X_i(x_1, \ldots, b_i, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{Q_i} X_i(x_1, \ldots, a_i, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\{x \in \partial Q \,|\, x_i = b_i\}} \langle X(x), e_i \rangle \, d\omega(x) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \int_{\{x \in \partial Q \,|\, x_i = a_i\}} \langle X(x), e_i \rangle \, d\omega(x) \\
&= \int_{\partial Q} \langle X, \nu \rangle \, d\omega \,.
\end{aligned}$$

Aber wir wollen natürlich die Aussage nicht nur für Quader zur Verfügung haben. Eine geeignete Klasse von Gebieten wird wie folgt definiert.

14.1 Definition. *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat einen* C^1-Rand, *wenn es zu jedem $p \in \partial\Omega$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine C^1-Funktion $u : U \to I$ gibt so, dass nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten gilt:*

$$\Omega \cap (U \times I) = \{(x,y) \in U \times I \,\big|\, y < u(x)\}\,.$$

Anschaulich hat eine Menge C^1-Rand, wenn ihr Rand eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, und die Menge lokal auf einer Seite des Randes liegt. Dies wird in folgendem Lemma präzisiert.

14.2 Lemma. *Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand gilt:*

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap (U \times I) &= \{(x,y) \in U \times I \,\big|\, y = u(x)\}\,, \\ (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap (U \times I) &= \{(x,y) \in U \times I \,\big|\, y > u(x)\}\,. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ nach dem Graphenkriterium in Satz 13.8.

Beweis: Mit der Funktion $F : U \times I \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y - u(x)$, gilt nach Voraussetzung $\Omega \cap (U \times I) = \{F < 0\}$. Aus der Stetigkeit von F folgt $\partial\Omega \cap (U \times I) \subset \{F = 0\}$. Ist andererseits $F(x,y) = 0$, so folgt für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein $(x, y - \varepsilon) \in U \times I$ und

$$F(x, y - \varepsilon) = F(x,y) - \varepsilon < 0\,.$$

Dies zeigt $(x,y) \in \overline{\Omega}$, und wegen $(x,y) \notin \Omega$ folgt $(x,y) \in \partial\Omega \cap (U \times I)$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen, und die zweite folgt wegen $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. $\square$

14.3 Beispiel. Der Halbraum $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)$ hat C^1-Rand, denn in Definition 14.1 können wir für alle $p \in \partial\mathbb{H}^n$ wählen $u : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $u(x) \equiv 0$. Dagegen hat $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n \neq 0\}$ keinen C^1-Rand, obwohl der Rand $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist. Denn für eine lokale Beschreibung als Subgraph wie in Definition 14.1 würde mit Lemma 14.2 folgen:

$$\{(x,y) \in U \times I : y > u(x)\} = (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap (U \times I) = \emptyset\,,$$

ein Widerspruch, da I offen und $u(x) \in I$ für $x \in U$ ist.

Zur Formulierung des Satzes von Gauß benötigen wir noch einige Begriffe.

14.4 Lemma (Definition der äußeren Normale). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Dann gibt es zu $p \in \partial\Omega$ genau einen Vektor $\nu(p) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $\nu(p) \perp T_p(\partial\Omega)$ *und* $|\nu(p)| = 1$,

(ii) $p + t\nu(p) \notin \Omega$ *für $t > 0$ hinreichend klein.*

Das Vektorfeld $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \nu(p)$, ist stetig und heißt äußere Normale *von Ω.*

Beweis: Wähle zu $p \in \partial\Omega$, nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten, eine Darstellung $\Omega \cap (U \times I) = \{(x,y) \in U \times I \,|\, y < u(x)\}$. Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit der äußeren Normalen gleich für alle $q \in \partial\Omega \cap W$ mit $W = U \times I$. Nach Lemma 14.2 ist die Graphendarstellung $f : U \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (x, u(x))$, eine lokale Parametrisierung von $\partial\Omega$. Nach dem Beweis von Folgerung 13.17 besitzt $T_q(\partial\Omega)$ also für $q = (x, u(x))$ die Basis

$$(e_i, \partial_i u(x)) = \frac{d}{dt}\,(x + te_i, u(x + te_i))\big|_{t=0}\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,.$$

Definiere auf $\partial\Omega \cap W$ das Vektorfeld

$$\nu(q) = \frac{(-Du(x), 1)^\top}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \qquad \text{für } q = (x, u(x))\,. \tag{14.5}$$

Damit hat $\nu(q)$ die Eigenschaft (i). Weiter gilt $q + t\nu(q) = ((x(t), y(t))$ mit

$$x(t) = x - t\,\frac{Du(x)^\top}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \quad \text{und} \quad y(t) = u(x) + t\,\frac{1}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}\,(y(t) - u(x(t))\big|_{t=0} = \sqrt{1 + |Du(x)|^2} > 0\,. \tag{14.6}$$

Also gilt $q + t\,\nu(q) \notin \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein nach Lemma 14.2. Damit ist für jedes $q \in \partial\Omega \cap W$ ein Vektor $\nu(q)$ mit den gewünschten Eigenschaften bestimmt, der außerdem stetig von $q \in \partial\Omega \cap W$ abhängt.

Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit. Hat $\nu \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft (i) im Punkt q, so folgt $\nu = \pm\nu(q)$ mit $\nu(q)$ wie in (14.5). Aber nach (14.6) und Lemma 14.2 gilt $q - t\nu(q) \in \Omega$ für $t > 0$ hinreichend klein, also wird das Vorzeichen durch (ii) bestimmt. □

14.7 Definition ($C^1(\overline{\Omega})$-Raum). *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $C^1(\overline{\Omega})$ den Unterraum aller Funktionen $f \in C^1(\Omega)$, für die f und das Differential Df stetige Fortsetzungen auf $\overline{\Omega}$ besitzen. Es ist dabei üblich, die Fortsetzung von f wieder mit f zu bezeichnen.*

Wir zeigen nun eine lokale Fassung des Satzes von Gauß, die den Kern des Beweises ausmacht.

14.8 Lemma. *Sei $\Omega = \{(x,y) \in U \times I \,|\, y < u(x)\}$, wobei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $u \in C^1(U, I)$ mit $u(U) \subset (a,b)$. Hat das Vektorfeld $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ kompakten Träger in $U \times I$, so gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle \, d\omega\,.$$

Beweis: Da $X(x,a) = 0$ für alle $x \in U$, folgt mit Fubini

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_y X_n \, d\lambda^n &= \int_U \int_a^{u(x)} \partial_y X_n(x,y)\, dy\, d\lambda^{n-1}(x) \\ &= \int_U X_n\big(x,u(x)\big)\, d\lambda^{n-1}(x)\,.\end{aligned} \tag{14.9}$$

Weiter behaupten wir für $i = 1,\ldots,n-1$

$$\int_\Omega \partial_i X_i \, d\lambda^n = -\int_U X_i\big(x,u(x)\big)\partial_i u(x)\, d\lambda^{n-1}(x)\,. \tag{14.10}$$

Aus (14.9) und (14.10) folgt das Lemma, denn wir haben

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div} X\, d\lambda^n &= -\sum_{i=1}^{n-1}\int_U X_i\big(x,u(x)\big)\partial_i u(x)\, dx + \int_U X_n\big(x,u(x)\big)\, d\lambda^{n-1}(x) \\ &= \int_U \Big\langle X(x,u(x)), \frac{(-Du(x),1)^\top}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}\Big\rangle \sqrt{1+|Du(x)|^2}\, d\lambda^{n-1}(x) \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle X,\nu\rangle\, d\omega\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Formel (13.21) zur Berechnung des Oberflächenintegrals, Formel (13.7) für die Jacobische von Graphen und Formel (14.5) für die äußere Normale benutzt. Um Gleichung (14.10) zu verifizieren, wählen wir eine Abschneidefunktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(t) = 1$ für $t \leq -2$ und $\eta(t) = 0$ für $t \geq -1$, und setzen $\eta_\varepsilon(t) = \eta(t/\varepsilon)$. Es folgt $\eta_\varepsilon(y - u(x)) = 0$ für $y \geq u(x) - \varepsilon$ und

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \eta_\varepsilon\big(y - u(x)\big)\big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y < u(x)\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Mit zweimaliger partieller Integration (Satz 10.20) sehen wir für $i = 1,\ldots,n-1$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \partial_i X_i(x,y)\eta_\varepsilon(y-u(x))\, d\lambda^n(x,y) \\ &\quad= \int_\Omega X_i(x,y)\eta_\varepsilon'(y-u(x))\partial_i u(x)\, d\lambda^n(x,y) \\ &\quad= -\int_\Omega \partial_y X_i(x,y)\eta_\varepsilon(y-u(x))\partial_i u(x)\, d\lambda^n(x,y)\,.\end{aligned}$$

Da die beteiligten Funktionen beschränkt sind, folgt mit dem Satz von Lebesgue für $\varepsilon \searrow 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i X_i \, d\lambda^n &= -\int_\Omega \partial_y X_i(x,y)\partial_i u(x) d\lambda^n(x,y)\\ &= -\int_U \Big(\int_a^{u(x)} \partial_y X_i(x,y)\, dy\Big)\partial_i u(x)\, d\lambda^{n-1}(x)\\ &= -\int_U X_i(x,u(x))\partial_i u(x)\, d\lambda^{n-1}(x)\,.\end{aligned}$$

Das ist (14.10), also ist das Lemma bewiesen. □

Wir müssen schließlich das Resultat globalisieren. Das entscheidende Hilfsmittel ist dabei eine sogenannte Zerlegung der Eins.

14.11 Lemma (Zerlegung der Eins). *Sei W_λ, $\lambda \in \Lambda$, eine offene Überdeckung der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine endliche Familie von Funktionen $\chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \le j \le N$, so dass gilt:*

(i) $\sum_{j=1}^N \chi_j(x) = 1$ *für alle* $x \in K$.
(ii) *Für jedes* $j \in \{1,\dots,N\}$ *gibt es ein* $\lambda = \lambda(j)$ *mit* $\operatorname{spt}\chi_j \subset W_\lambda$.

Beweis: Zu $x \in K$ wähle $\lambda(x) \in \Lambda$ mit $x \in W_{\lambda(x)}$, und dann $r(x) > 0$ mit $\overline{B}_{2r(x)}(x) \subset W_{\lambda(x)}$. Endlich viele Kugeln $B_{r(x_j)}(x_j)$, $1 \le j \le N$, überdecken K. Wähle $\widetilde{\chi}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widetilde{\chi}_j = \begin{cases} 1 & \text{auf } B_{r(x_j)}(x_j)\,,\\ 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus B_{2r(x_j)}(x_j)\,.\end{cases}$$

Dann ist $\operatorname{spt}\widetilde{\chi}_j \subset W_{\lambda(x_j)}$ und $\sum_{j=1}^N \widetilde{\chi}_j(x) \ge 1$ für alle $x \in K$. Also können wir setzen:

$$\chi_j = \widetilde{\chi}_j / \sum_{j=1}^N \widetilde{\chi}_j\,.$$ □

14.12 Satz (Integralsatz von Gauß). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit C^1-Rand und äußerer Normale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt für ein Vektorfeld $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle \, d\omega\,.$$

Beweis: Wähle zu jedem $p \in \partial\Omega$ eine Umgebung $W_p = U \times I$, in der Ω bezüglich geeigneter Koordinaten als Subgraph dargestellt ist. Für $p \in \Omega$ setze einfach $W_p = \Omega$. Die Mengen W_p bilden eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$. Wähle mit Lemma 14.11 eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\chi_1, \dots, \chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Liegt $\operatorname{spt}\chi_j$ in einer Randumgebung, so folgt aus Lemma 14.8

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\chi_j X)\, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \langle \chi_j X, \nu\rangle \, d\omega\,.$$

Ist $\operatorname{spt}\chi_j \subset W_p = \Omega$, so folgt einfach mit partieller Integration (Satz 10.20)

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\chi_j X)\, d\lambda^n = 0 = \int_{\partial\Omega} \langle \chi_j X, \nu\rangle\, d\omega\,.$$

Durch Addition erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div} X\, d\lambda^n = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \operatorname{div}(\chi_j X)\, d\lambda^n &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} \langle \chi_j X, \nu\rangle\, d\omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu\rangle\, d\omega\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Der Satz von Gauß wird oft für Gebiete benötigt, die nicht C^1-Rand haben, zum Beispiel Polyeder. Der gegebene Beweis kann auf Gebiete ausgedehnt werden, deren Rand lokal ein Lipschitzgraph ist (vgl. H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis).

14.13 Folgerung (Greensche Formeln). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Dann gilt für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und $v \in C^2(\overline{\Omega})$*

$$\int_\Omega u\Delta v + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle\, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\omega\,.$$

Weiter folgt für $u.v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u\, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\omega\,.$$

Beweis: Die erste Aussage folgt aus dem Satz von Gauß wegen $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + u\Delta v$. Die zweite Aussage ergibt sich aus der ersten durch Vertauschen von u und v. $\square$

2.15 Faltungen

Die Faltung ordnet zwei gegebenen Funktionen eine dritte Funktion durch gewichtete Mittelung zu. Dieses Verfahren kann unter anderem dazu benutzt werden, gegebene Funktionen zu regularisieren bzw. zu glätten.

In diesem Kapitel haben wir es ausschließlich mit dem n-dimensionalen Lebesguemaß zu tun, und wir schreiben statt $d\lambda^n(x)$ stets einfach dx.

15.1 Lemma. *Sei $\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau_h(x) = x + h$ die Translation um $h \in \mathbb{R}^n$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p < \infty$ gelten folgende Aussagen:*

(i) $f \circ \tau_h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und* $\|f \circ \tau_h\|_p = \|f\|_p$.

(ii) $\|f \circ \tau_h - f\|_p \to 0$ *für* $h \to 0$.

Beweis: Aussage (i) folgt aus dem Transformationssatz (Satz 12.4). Wir zeigen (ii) zunächst unter der Annahme $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\omega_f(\delta) := \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| \searrow 0$ für $\delta \searrow 0$, und es folgt

$$\|f \circ \tau_h - f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| \leq \omega_f(|h|) \to 0 \text{ mit } h \to 0.$$

Wähle $R > 0$ mit $\operatorname{spt} f \subset B_R(0)$. Wegen $\operatorname{spt} f \circ \tau_h \subset B_{R+1}(0)$ für $|h| < 1$ folgt

$$\|f \circ \tau_h - f\|_p \leq \|f \circ \tau_h - f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \, \lambda^n(B_{R+1}(0))^{\frac{1}{p}} \to 0 \text{ mit } h \to 0.$$

Sei nun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach Satz 9.17 ist $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$, also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $f_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} < \varepsilon/2$, und es folgt mit Aussage (i)

$$\begin{aligned} \|f \circ \tau_h - f\|_p &\leq \|(f - f_\varepsilon) \circ \tau_h\|_p + \|f_\varepsilon \circ \tau_h - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p \\ &< \|f_\varepsilon \circ \tau_h - f_\varepsilon\|_p + \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Also gilt $\limsup_{h \to 0} \|f \circ \tau_h - f\|_p \leq \varepsilon$, und mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt Behauptung (ii). □

15.2 Satz (Definition der Faltung). *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < \infty$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die* Faltung *von f mit g ist die λ^n-fast-überall definierte Funktion*

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \; (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy.$$

Es gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sowie $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_p \, \|g\|_1$.

Beweis: Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(x-y)g(y)$ ist messbar bezüglich $\lambda^{2n} = \lambda^n \times \lambda^n$. Denn $f_0(x,y) = f(x)$ und $g_0(x,y) = g(y)$ sind λ^{2n}-messbar, und wegen $f(x-y) = (f_0 \circ T)(x,y)$ mit $T(x,y) = (x-y,y)$ ist $(x,y) \mapsto f(x-y)$ ebenfalls λ^{2n}-messbar nach dem Beweis von Satz 6.17. Wir zeigen die Behauptung zunächst für $f, g \geq 0$. Nach dem Satz von Fubini, Satz 10.16, ist die Funktion $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) \, dy$ für λ^n-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und λ^n-messbar. Weiter folgt mit der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)^{\frac{1}{p}} \, g(y)^{\frac{p-1}{p}} \, dy \right)^p dx \\ &\leq \int_{R^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^p g(y) \, dy \right) \left(\int g(y) \, dy \right)^{p-1} dx \\ &= \left(\int_{R^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)^p g(y) \, dx \, dy \right) \left(\int g(y) \, dy \right)^{p-1} \\ &= \|f\|_p^p \, \|g\|_1^p < \infty \,. \end{aligned}$$

Für allgemeine $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt durch Zerlegung in $f^\pm$ bzw. $g^\pm$, dass die Funktion $f * g$ für λ^n-fast-alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert und endlich ist, sowie λ^n-messbar. Der Satz ergibt sich nun aus dem Fall $f, g \geq 0$ und der Abschätzung

$$\|f * g\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right)^p dx \leq \|f\|_p^p\, \|g\|_1^p .$$

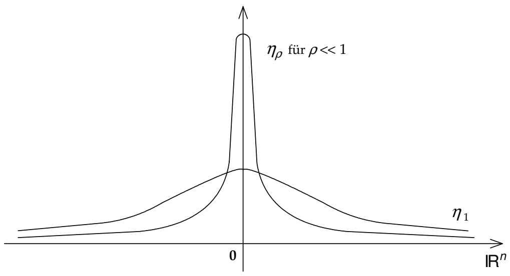
□

Die Faltung ist kommutativ, denn mit der Substitution $x - y = z$ folgt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(x-z)\, dz = (g * f)(x). \quad (15.3)$$

15.4 Satz (Approximation durch Faltung). *Sei $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, dx = 1$. Für $\varrho > 0$ sei $\eta_\varrho(x) := \varrho^{-n}\, \eta(\frac{x}{\varrho})$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1, \infty)$ ist dann auch $f * \eta_\varrho \in L^p(\mathbb{R}^n)$, es gilt $\|f * \eta_\varrho\|_p \leq \|f\|_p\, \|\eta\|_1$ und*

$$f * \eta_\varrho \to f \ \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n) .$$



Beweis: Durch Substitution sieht man $\|\eta_\varrho\|_1 = \|\eta\|_1$, daher gilt $f * \eta_\varrho \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|f * \eta_\varrho\|_p \leq \|f\|_p\, \|\eta\|_1$ nach Satz 15.2. Weiter folgt mit der Substitution $y = \varrho z$

$$(f * \eta_\varrho)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \eta_\varrho(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varrho z) \eta(z)\, dz.$$

Aus der Definition der Faltung folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |(f * \eta_\varrho)(x) - f(x)|^p\, dx \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x - \varrho z) - f(x)\big) \eta(z)\, dz \Big|^p dx \\ &\quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \varrho z) - f(x)|\, |\eta(z)|^{\frac{1}{p}}\, |\eta(z)|^{\frac{p-1}{p}}\, dz \right)^p dx =: I . \end{aligned}$$

Den letzten Term I schätzen wir nun mit der Hölderschen Ungleichung und dem Satz von Fubini wie folgt ab:

$$\begin{aligned} I &\leq \|\eta\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varrho z) - f(x)|^p \, |\eta(z)| \, dz \, dx \\ &= \|\eta\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(z)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varrho z) - f(x)|^p \, dx \, dz \\ &= \|\eta\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta(z)| \, \|f \circ \tau_{-\varrho z} - f\|_p^p \, dz \,. \end{aligned}$$

Im letzten Integral geht der Integrand punktweise gegen Null mit $\varrho \to 0$ nach Lemma 15.1(ii). Außerdem gilt die Abschätzung

$$|\eta(z)| \, \|f \circ \tau_{-\varrho z} - f\|_p^p \leq 2^p \, \|f\|_p^p \, |\eta(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \,.$$

Also konvergiert das Integral gegen Null nach dem Satz über majorisierte Konvergenz. □

Wir kommen nun zur Glättung von L^p-Funktionen und erinnern dazu an die Multiindexnotation für Ableitungen von Funktionen im $\mathbb{R}^n$. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setzt man

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \qquad \text{und} \qquad D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} .$$

15.5 Satz (Glättung). *Sei $\eta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit $\|D^\alpha \eta\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq K$ für $|\alpha| \leq k$. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist dann $f * \eta \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$D^\alpha (f * \eta) = f * (D^\alpha \eta), \;\; \textit{insbesondere} \; \|D^\alpha (f * \eta)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq K \, \|f\|_1 \,.$$

Beweis: Nach der Substitution $z = x - y$ haben wir

$$(f * \eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x,z) \, dz \qquad \text{mit } F(x,z) = f(z)\eta(x-z) \,.$$

Im Fall $k = 0$ gilt $F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, die Funktion $F(\cdot, z)$ ist stetig für λ^n-fast-alle $z \in \mathbb{R}^n$ und wir haben die Abschätzung

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |F(x,z)| \leq K \, |f(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \,.$$

Also ist $\eta * f$ stetig nach Lemma 8.10 und es gilt $\|f * \eta\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq K \, \|f\|_1$. Im Fall $k = 1$ gilt $F(\cdot, z) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ für λ^n-fast-alle $z \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x,z) \Big| \leq K \, |f(z)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Aus Satz 8.11 folgt $f * \eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_j (f * \eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \partial_j \eta(x-z) \, dz = (f * \partial_j \eta)(z)$, insbesondere gilt die Abschätzung $\|\partial_j (f * \eta)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq K \, \|f\|_1$. Die Aussage für eine Ableitung D^α mit Ordnung $|\alpha| \leq k$ ergibt sich in offensichtlicher Weise durch Induktion. □

Mit dem Verfahren der Glättung lässt sich das Dichteresultat aus Satz 9.17 verschärfen.

15.6 Folgerung (Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es zu $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - f_k\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.*

Beweis: Wegen Satz 9.17 können wir $f \in C_0^0(\Omega)$ annehmen. Wähle eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, $\int \eta\, dx = 1$ und $\operatorname{spt} \eta \subset \overline{B_1(0)}$. Mit $\eta_\varrho(x) = \varrho^{-n}\eta(\frac{x}{\varrho})$ gilt dann $f * \eta_\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 15.5 und $f * \eta_\varrho \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nach Satz 15.4. Es bleibt nur noch zu prüfen, dass $\operatorname{spt} f * \eta_\varrho$ kompakte Teilmenge von Ω ist für $\varrho > 0$ hinreichend klein. Aber für $\operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} f) > \varrho$ gilt $(f * \eta_\varrho)(x) = 0$, denn für $|y| \geq \varrho$ ist $\eta_\varrho(y) = \varrho^{-n}\eta(\frac{y}{\varrho}) = 0$ und für $|y| \leq \varrho$ gilt $f(x-y) = 0$. Damit ist die Folgerung bewiesen. □

Das folgende Argument spielt unter anderem in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine Rolle. Es ist dabei nützlich, die Aussage mit *lokal integrierbaren Funktionen* zu formulieren.

15.7 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$. Die messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ liegt in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, falls $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ ist für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$.*

15.8 Folgerung (Fundamentallemma der Variationsrechnung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für die Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gelte*

$$\int_\Omega f\varphi\, dx \geq 0 \qquad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ mit } \varphi \geq 0\,.$$

Dann folgt $f(x) \geq 0$ für λ^n-fast-alle $x \in \Omega$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass $E = \{x \in \Omega \,|\, f(x) < 0\}$ eine Nullmenge ist. Nach Satz 6.8 gilt

$$\lambda^n(E) = \sup\{\lambda^n(K) \,|\, K \subset E \text{ kompakt}\}\,.$$

Sei $K \subset E$ kompakt und sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \geq 0$, $\operatorname{spt}\eta \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int \eta\, dx = 1$. Dann folgt $\eta_\varrho * \chi_K \to \chi_K$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, und nach Folgerung 9.11 gilt für eine Teilfolge $\eta_{\varrho_i} * \chi_K \to \chi_K$ punktweise λ^n-fast-überall. Wegen $\|\eta_{\varrho_i} * \chi_K\|_\infty \leq 1$ liefert der Konvergenzsatz von Lebesgue

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f\,(\eta_{\varrho_i} * \chi_K)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_K\, dx\,.$$

Aber nach Annahme gilt $f < 0$ auf K, also folgt $\lambda^n(K) = 0$ und damit $\lambda^n(\{f < 0\}) = 0$. □

15.9 Beispiel. Es gibt keine Funktion $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f * \eta = f$ für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Denn sonst folgt zum Beispiel in $x = 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-y)\eta(y)\, dy = f(0) \qquad \text{für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\,,$$

und Folgerung 15.8 impliziert $\eta = 0$ fast überall, ein Widerspruch.