Abteilung für Angewandte Mathematik 19.10.2009
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening

Analysis III

WS 2009/10 — Woche 1

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/ana3_WS09/

Abgabe: Montag, den 26. Oktober, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **6 Punkte**

Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \big\{ A \subset X \,|\, A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar.} \big\}$$

eine σ-Algebra auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die von

$$M := \big\{ A \subset X \,|\, A \text{ ist endlich} \big\}$$

erzeugte σ-Algebra ist.

Aufgabe 2 **3 Punkte**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \{ B \subset Y \,|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Sei X eine Menge und $\omega : X \to [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} \omega(x)$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist.

Da X überabzählbar sein darf, ist die unendliche Summe wie folgt definiert

$$\sum_{x \in A} \omega(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in K} \omega(x) \,|\, K \subset A \text{ ist endlich} \right\}.$$

Dies geht nur, da ω nicht-negativ ist.