Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, PD Dr. L. Diening 21.12.2009

**Analysis III**

WS 2009/10 — Woche 10

**Abgabe: Montag, den 11. Januar, vor der Vorlesung**

**Aufgabe 35** **5 Punkte**

Sei $1 \le p < \infty$ und $f_n, f \in L^p$ mit $f_n \to f$ in $L^p$. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$ existiert derart, dass

(a) Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_A |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$.

(b) Es gilt $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus E} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$.

**Aufgabe 36** **5 Punkte**

Wir definieren

$$\begin{aligned}
&\text{Zylinder:} && Z := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} |\, z \in [0,1], |x| \le 1\},\\
&\text{Kegel :} && K := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} |\, z \in [0,1], |x| \le 1 - |z|\},\\
&\text{Halbkugel :} && H := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} |\, z \in [0,1], |x| \le \sqrt{1 - z^2}\}.
\end{aligned}$$

Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen von $H$, $Z$ und $K$ im Vergleich zum 2-dimensionalen Volumen der 2-dimensionalen Einheitskugel.

**Definition:** Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heisst *separabel*, falls es eine abzählbare, dichte Teilmenge gibt,

**Definition:** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann heißt $\mu$ *separabel*, falls es Mengen $E_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(a) $\mu(E_i) < \infty$ für $i \in \mathbb{N}$.

(b) Für jedes $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mu(E \triangle E_i) < \varepsilon$.

**Aufgabe 37** **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mu$ separabel. Zeigen Sie, dass $L^1(\mu)$ separabel ist.
Tipp: Sei $S_0$ die Menge der Funktionen der Form $\sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{E_i}$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ und $E_i$ wie in der Definition. Zeigen Sie, dass $S_0$ dicht in der Menge $S$ der Funktionen der Form $\sum_{i=1}^N s_i \chi_{A_i}$ mit $N \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{Q}$, $A_i \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_i) < \infty$ ist. Nutzen Sie $|\chi_A - \chi_B| \le |\chi_{A \triangle B}|$.

**Aufgabe 38** **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass $\lambda^n$ separabel ist. Folgern Sie, dass $L^1(\Omega)$ für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ separabel ist.
Tipp: Approximieren Sie zunächst die offenen Menge durch geeignete Quader.